

TEMA 2 : DERIVADAS

- 1) Derivada de una función en un punto.
 - Definición. Interpretación gráfica.
 - Derivadas laterales.
- 2) Función derivada.
 - Derivadas sucesivas.
- 3) Reglas de derivación.
 - Derivación simple.
 - Derivación compuesta o regla de la cadena.
 - Técnicas de derivación.
- 4) Derivabilidad de una función.
 - Definición.
 - Continuidad y derivabilidad.

RESUMEN DEL TEMA

1) DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

1.1 Tasa de variación media

Dada una función $y = f(x)$ se llama incremento de f en x_0 $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$

Su significado es la variación (aumento o disminución) de f cuando la variable independiente pasa de x_0 a $x_0 + h$. A h se le llama incremento de x .

Al cociente incremental $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ se llama tasa de variación media y significa la variación relativa de f con respecto a x en el intervalo $(x_0, x_0 + h)$

1.2 Derivada en un punto:

Al límite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ si existe y es finito se llama derivada de la función f en x_0 y se designa por $f'(x_0)$.

Gráficamente la derivada de una función en un punto representa la pendiente de la recta tangente trazada a la curva en el punto x_0 .

1.3 Derivadas laterales:

Se llama derivada por la izquierda de x_0 a $f'(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Se llama derivada por la derecha de x_0 a $f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Si $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$ existe la derivada en el punto, si no es así se dice que el punto es anguloso y no existe la derivada.

Ejercicios:

1.- Sea la función $f(x) = \frac{3}{x-2}$ calcular la derivada en el punto 4

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{h+2} - \frac{3}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{6-3h-6}{2(h+2)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{2h(h+2)} = \frac{-3}{4}$$

2.- Calcular la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto $x_0 = 3$

3.- Calcular la derivada de la función $f(x) = x^2 - 1$ en el punto $x_0 = 2$

4.- Calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto $x_0 = 0$

2) FUNCIÓN DERIVADA

Sea f una función derivable en un intervalo I , la función que asocia a cada punto la derivada en dicho punto se le llama **función derivada**.

$x \rightarrow f'(x)$

Si el proceso se vuelve a repetir obtenemos las derivadas sucesivas, f' , f'' , f''' , f^{IV} ...

3) REGLAS DE DERIVACIÓN

CUADRO EDITADO DE FORMA SEPARADA PARA MÁS COMODIDAD AL ESTUDIAR

4) DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN

Una función es derivable en un intervalo si es derivable en todos los puntos de dicho intervalo.

RESULTADOS:

- Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en ese punto.
- Si una función **no** es continua en un punto, entonces **no** es derivable en ese punto.
- Si la función derivada es continua en un punto, entonces es derivable en ese punto.

PASOS PARA ESTUDIAR LA DERIVABILIDAD.

1º) En primer lugar, comprobaremos que la función es continua, puesto que en caso de no serlo, ya podríamos decir que tampoco es derivable.

2º) Una vez demostrada la continuidad, estudiaremos la existencia de su derivada, para ello comprobaremos que sus derivadas laterales existen y tienen el mismo valor: