

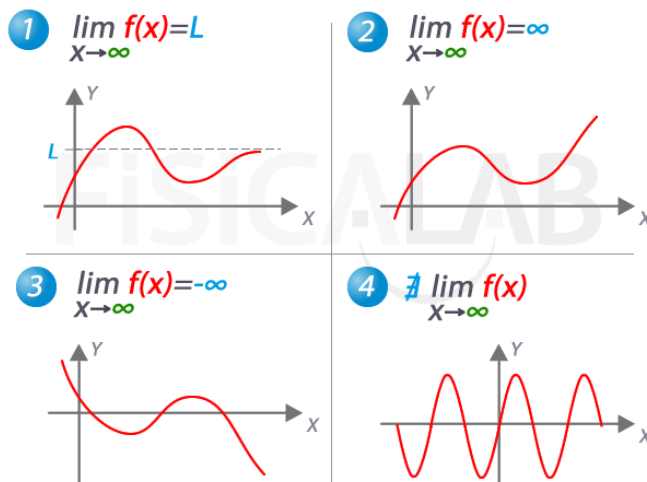
TEMA 1: LÍMITES Y CONTINUIDAD

1) LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x \rightarrow +\infty$

Hay que tener claro lo que significa un límite de una función, es fácil: “es la altura a la que llega la función cuando la variable x se acerca al valor al que tiende”.

Los límites pueden ser de tres tipos, según a lo que tienda la variable, cuando $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ y cuando $x \rightarrow a$.

La idea gráfica es:

1.1) **Cociente de dos polinomios:** Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Método: Hay que dividir el numerador y denominador por la mayor potencia de x

Regla rápida:

- Si grado $P >$ grado Q entonces: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm \infty$
- Si grado $P <$ grado Q entonces: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$
- Si grado $P =$ grado Q entonces: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = a/b$, siendo a y b los coeficientes de los términos de mayor grado en el numerador y denominador.

1.2) **Diferencia de expresiones infinitas:** Indeterminación $\infty - \infty$

Se pueden diferenciar tres casos:

A.- Si se puede efectuar la operación, se realizará.

B.- Si hay radicales, habrá que multiplicar y dividir por la expresión conjugada.

C.- Si las expresiones son infinitos de distinto orden, se aplica el orden correspondiente.

1.3) **Producto de expresiones:** Indeterminación $0 \cdot \infty$

Método: Hay que hacer transformaciones para convertirlo en una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

2) LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x \rightarrow -\infty$

El cálculo se reduce a sustituir x por $-x$ en la función y calcular el límite cuando x tiende a $+\infty$ en vez de $-\infty$. Se procederá como en el apartado anterior.

3) LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x \rightarrow x_0$

Definición: Decimos que el límite de una función en un punto es l , si existen los límites laterales y coinciden.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

3.1) Indeterminación 0/0 :

Cociente de dos polinomios: se divide por Ruffini entre $x-c$, siendo c el número al que tiende el límite; luego se simplifica.

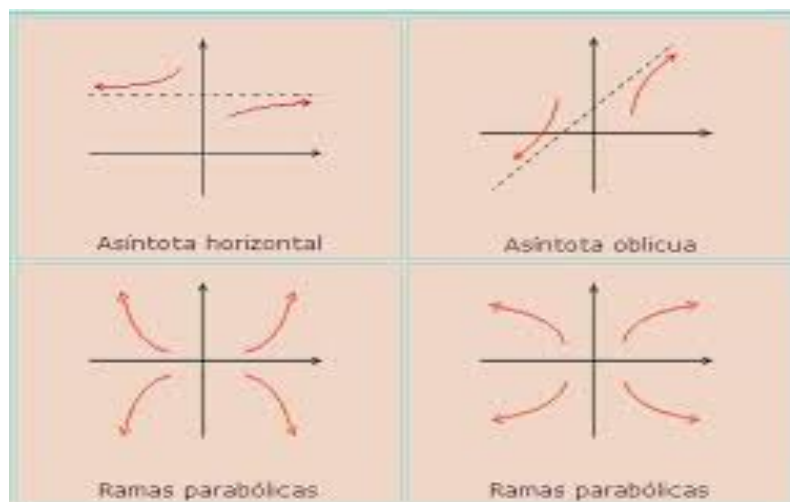
3.2) Indeterminación $\infty-\infty$:

Se efectuará la operación de restar y se procederá cómo corresponda.

4) RAMAS INFINITAS : ASÍNTOTAS

En la gráfica de una función pueden existir tramos en los que la función se aleja indefinidamente. Estos tramos se llaman **ramas infinitas** de la función.

- + Cuando una rama infinita se acerca indefinidamente a una recta, esa recta se llama **asíntota** y la rama infinita, **rama asintótica**.
- + Cuando una rama infinita no se acerca a ninguna recta, se denomina **rama parabólica**.



4.1) Asíntotas horizontales:

Definición: Una función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = k$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$

4.2) Asíntotas verticales:

Definición: Una función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = c$ si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$

4.3) Asíntotas oblicuas:

Definición: Una función $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = mx + n$ si:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = n$$

5) CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Una función $f(x)$ es **continua en un punto** $x = a$ si se cumple que:

- ✚ Existe $f(a)$
- ✚ Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- ✚ $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Si una función no es continua en un punto, decimos que la función presenta una **discontinuidad** en ese punto.

Una función es continua en un intervalo si es continua en todos los puntos del intervalo.

5.1) Continuidad en las funciones elementales

- Las **funciones polinómicas** son continuas en todo $\mathbb{R}$
- Las **funciones racionales** no son continuas en los puntos que anulan el denominador
- Las **funciones con radicales** con índice par no existen en los valores que hacen el radicando negativo. Si el índice es impar, son continuas en todo $\mathbb{R}$
- Las **funciones exponenciales** son continuas en todo $\mathbb{R}$
- Las **funciones logarítmicas** no son continuas en los puntos en los que el logaritmo es cero o un número negativo.
- Las **funciones trigonométricas** son continuas siempre excepto $f(x) = \tan x$, que no existe en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

5.2) Tipos de discontinuidades

- Discontinuidad evitable:** ocurre uno de los dos casos
 - * $\nexists f(a)$
 - * $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- Discontinuidad de salto finito:** los límites laterales no coinciden

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$
- Discontinuidad esencial o de salto infinito:**

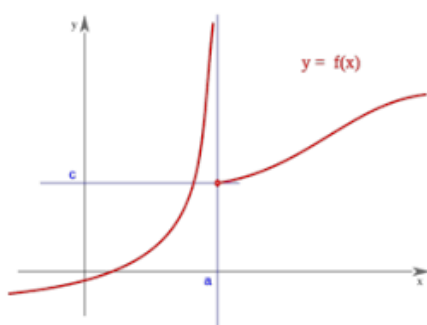
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$



1) Discontinuidad evitable

2) Discontinuidad de salto finito

3) Discontinuidad evitable



4) Discontinuidad de salto infinito