

TEMA 3 : APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

- 1) Recta tangente a una curva en un punto.
- 2) Crecimiento o monotonía de una función.
- 3) Puntos singulares o extremos.
- 4) Curvatura (concavidad y convexidad) y puntos de inflexión.
- 5) Optimización de funciones.
- 6) Regla de L'Hôpital.

RESUMEN DEL TEMA

1) RECTA TANGENTE A UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO:

Si $f(x)$ es derivable en un punto x_0 , la **ecuación de la recta tangente** a la gráfica de $y = f(x)$ en x_0 es:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

2) CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN (Monotonía)

f es creciente en un punto $x_0 \Leftrightarrow$ si existe un entorno del punto, es decir, $(x_0 - a, x_0 + a)$ tal que cumple:

- Si $x_0 - a < x < x_0 \Rightarrow f(x_0 - a) < f(x) < f(x_0)$
- Si $x_0 < x < x_0 + a \Rightarrow f(x_0) < f(x) < f(x_0 + a)$

2.1 Crecimiento y derivada:

Si $f(x)$ es derivable y creciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

Si $f(x)$ es derivable y decreciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

2.2 Criterio para identificar tramos crecientes o decrecientes:

Si $f'(x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en x_0

Si $f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en x_0

3) PUNTOS SINGULARES O EXTREMOS:

Se denominan puntos singulares o extremos, a aquellos puntos que son máximos o mínimos relativos de la función.

3.1 Condición necesaria de máximo o mínimo: $f(x)$ tiene un máximo o mínimo en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

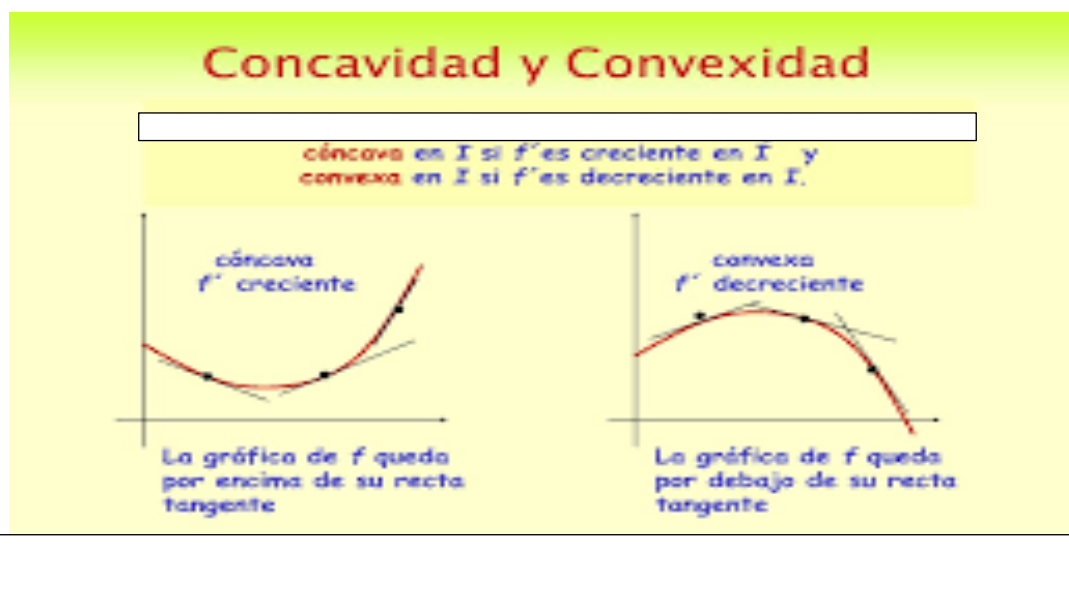
3.2 Identificación de máximos y mínimos: Si $f'(x_0) = 0$ y existe $f''(x_0)$, entonces:

Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene un **mínimo** en x_0

Si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ tiene un **máximo** en x_0

4) CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN:

Decimos que una curva es cóncava en un punto P si al trazar la tangente a dicha curva por ese punto, se sitúa por debajo de la función, en caso contrario se dice que es convexa. Si la tangente atraviesa la curva, tenemos un punto de inflexión.



4.1 Criterio para detectar el tipo de curvatura

Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es **convexa** en x_0

Si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es **cóncava** en x_0

Si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ tiene un **punto de inflexión** en x_0

5) OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

Pasos para resolver problemas de optimización

- Se plantea la función que hay que maximizar o minimizar.
- Se plantea una ecuación que relacione las distintas variables del problema, en el caso de que haya más de una variable.
- Se despeja una variable de la ecuación y se sustituye en la función de modo que nos quede una sola variable.
- Se deriva la función y se iguala a cero, para hallar los extremos locales.
- Se realiza la 2ª derivada para comprobar el resultado obtenido.

6) REGLA DE L'HÔPITAL

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas tales que cumplen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= 0 \quad \text{la regla de L'Hôpital nos dice que} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ g'(x) &\neq 0 \end{aligned}$$

Podemos aplicar esta regla si la indeterminación es $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

