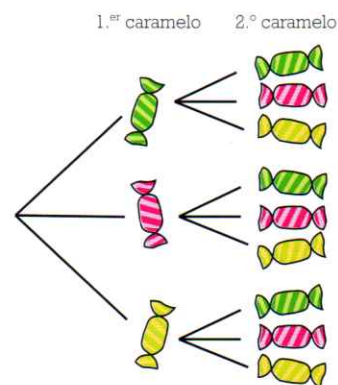




CÁLCULO MENTAL

Somos 12 amigos que queremos ir de excursión y el billete del autobús nos cuesta 32 € a cada uno, pero, si vamos al menos 10, nos hacen un descuento del 15 %.

¿Cuánto pagaremos entre todos?



1. Experimentos aleatorios

Al lanzar un balón hacia arriba, sabemos lo que ocurrirá: el balón volverá a caer. Es un **experimento determinista**. Si extraemos una carta de una baraja o lanzamos un dado, no conocemos de antemano lo que vamos a obtener. Este tipo de pruebas se conocen como **experimentos aleatorios**.

El conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral** (E). Para obtener el espacio muestral de un experimento, puede ser útil construir un **diagrama de árbol**.

>>> Ejemplo

Una bolsa contiene caramelos de menta, fresa y limón. Si sacamos dos caramelos de la bolsa, ¿qué combinaciones de sabores podemos obtener?

Representamos en un diagrama de árbol, como el que vemos a la izquierda, las posibilidades que tenemos en las dos extracciones.

El conjunto de combinaciones es el espacio muestral del experimento.

$$E = \{MM, MF, ML, FM, FF, FL, LM, LF, LL\}$$

2. Sucesos. Tipos de sucesos

Cualquier conjunto de resultados de un experimento aleatorio se llama **suceso**. Los sucesos están formados por uno o más elementos del espacio muestral.

Elemental	Es cada uno de los elementos del espacio muestral.
Compuesto	Está formado por varios sucesos elementales.
Seguro	Es el suceso que siempre va a ocurrir. Coincide con el espacio muestral, E .
Imposible	Es el que nunca puede ocurrir. Se representa por $\emptyset$.
Compatibles	Son los que pueden ocurrir a la vez.
Incompatibles	Son los que no pueden verificarse a la vez.

>>> Ejemplo

En el experimento «Lanzar un dado de parchís», indica cuál es el espacio muestral, y escribe y clasifica los siguientes sucesos.

- $A = \text{«Sacar un 3»}$.
- $B = \text{«Sacar un número menor que 3 y mayor que 3»}$.
- $C = \text{«Sacar un número impar y mayor que 2»}$.
- $D = \text{«Sacar un número menor que 7»}$.
- $F = \text{«Sacar un 0»}$.

El espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $A = \{3\}$. Suceso elemental.
- Suceso compuesto por dos sucesos incompatibles.
- $C = \{3, 5\}$. Suceso compuesto formado por dos sucesos compatibles.
- $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Suceso seguro.
- $F = \{\emptyset\}$. Suceso imposible.



ACTIVIDADES

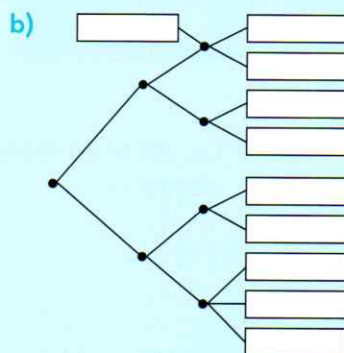
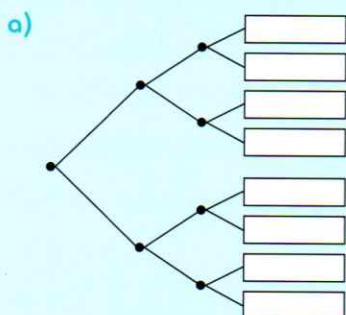
1 ¿Cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios y cuáles son deterministas?

- a) Abrir un grifo.
- b) Tirar una piedra a un lago.
- c) Extraer una bola numerada de una caja.
- d) Sacar un caramelo de naranja de una bolsa de caramelos variados.
- e) Saber el número de personas que suben a un avión.
- f) Calcular el doble de un número.
- g) Conocer el ganador de la Fórmula 1.
- h) Aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa de un triángulo.
- i) Calcular el volumen de un cilindro conociendo la altura y el diámetro de la base.
- j) Que te toque la lotería.

2 Representa en un diagrama de árbol y determina los espacios muestrales de los siguientes experimentos aleatorios.

- a) Lanzar una moneda al aire tres veces.
- b) Tirar un dado de quinielas dos veces.
- c) Sacar dos bolas de una bolsa que contiene dos bolas blancas y tres negras.
- d) Sacar tres bolas de una bolsa que tiene 3 bolas negras, 3 blancas y 3 azules.

3 Invéntate un enunciado que pueda ser representado por los siguientes diagramas de árbol.



4 Indica qué tipo de suceso es el que se plantea en cada caso.

- a) Salir un número primo al lanzar un dado.
- b) Sacar una bola verde de una caja que contiene dos bolas azules y tres blancas.
- c) Sacar dos veces 4 al lanzar dos dados.
- d) Extraer una figura de una baraja.
- e) Extraer una figura de oros de una baraja.
- f) Extraer un 14 en una baraja española.

5 ¿Cuáles de los siguientes sucesos son compatibles y cuáles son incompatibles?

- a) «Extraer una copa» y «extraer una espada» de una baraja.
- b) «Extraer un oro» y «extraer un 5» de una baraja.
- c) «Sacar un número primo» y «sacar un 3» al tirar un dado.
- d) «Obtener número impar» y «obtener múltiplo de 2» al tirar un dado.
- e) «Salir cara» y «salir cruz» al tirar dos monedas.
- f) «Sacar un número par» y «sacar un número menor que 4».
- g) «Sacar un número mayor que 5» y «sacar un número mayor que 3».
- h) «Sacar un oro» y «sacar un rey».

El suceso seguro
y el suceso imposible
son sucesos contrarios.



> Operaciones con sucesos

- El suceso **contrario** a un suceso A es el que se verifica cuando no ocurre A . Se representa por $\bar{A}$ o A^c .
- La **unión** de dos sucesos, $A \cup B$, ocurre cuando se verifica A o B . Es el suceso formado por los elementos de A y de B .

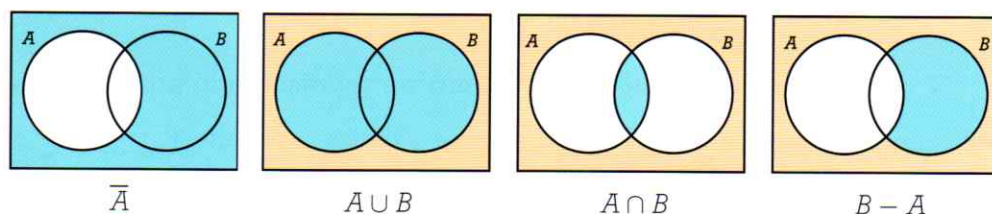
La unión de un suceso y su contrario es el espacio muestral.

- La **intersección** de dos sucesos, $A \cap B$, ocurre cuando se verifican al mismo tiempo A y B . Se compone de los elementos comunes a A y B .

Si dos sucesos no tienen elementos comunes, su intersección es el **conjunto vacío** ($\emptyset$).

- La **resta** de sucesos, $B - A$, es el conjunto de elementos que están en B y no están en A .

Podemos representar los sucesos y sus operaciones mediante los llamados **diagramas de Venn**.



- Las **leyes de Morgan** relacionan la unión y la intersección de sucesos contrarios.

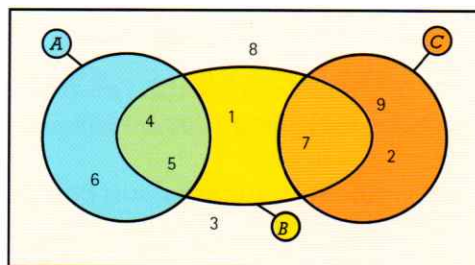
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

>>> Ejemplo

A partir del siguiente diagrama de Venn, escribe los sucesos que se indican.

- $A \cup C$
- $B \cap C$
- $\bar{A} \cup \bar{B}$
- $\overline{A \cup C}$
- $\overline{B \cap C}$
- $B - A$



- $A \cup C = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$
- $B \cap C = \{7\}$
- $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B} = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$
- $\overline{A \cup C} = \{1, 3, 8\}$
- $\overline{B \cap C} = \bar{B} \cup \bar{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$
- $B - A = \{1, 7\}$

ACTIVIDADES

- 6 En el experimento de hacer una extracción de una bolsa que contiene bolas numeradas del 1 al 9, se tienen los siguientes sucesos.

A = «Sacar una bola con un número par»

B = «Sacar un número comprendido entre 3 y 7»

C = «Sacar un número que no sea primo»

Escribe los sucesos $\bar{A}$, $A \cup B$, $B \cap C$, $\overline{A \cup C}$.

- 7 ¿Cuál es la intersección de dos sucesos incompatibles?

- 8 ¿Cuál es la intersección de un suceso y su contrario? ¿Y la unión?

- 9 Una urna contiene tres bolas blancas, dos amarillas y una azul. Se saca una bola de la urna. Escribe los siguientes sucesos.

a) «No sacar una bola blanca».

b) «Sacar una bola amarilla o azul».

c) «Sacar una bola negra».

d) «Sacar una bola blanca o amarilla».

- 10 Extraemos una carta de una baraja española. Consideramos los sucesos:

A = «Sacar un as»

B = «Sacar una espada»

C = «Sacar una figura»

Escribe los siguientes sucesos.

a) $B \cap C$

c) $\bar{B}$

e) $\overline{A \cup B}$

b) $A \cup B$

d) $A \cap C$

f) $\overline{B \cap C}$

- 11 En el experimento de lanzar un dado verde y otro azul, escribe los sucesos.

a) «Sacar un 9».

b) «Salir más de 8».

c) «Salir menos de 4 en el verde y más de 4 en el azul».

d) «Obtener mayor puntuación en el verde que en el azul».

- 12 Se lanza un dado al aire. Considera los sucesos:

A = «Sacar un número par»

B = «Sacar un número impar»

C = «Sacar un número menor que 5»

D = «Sacar un 4»

Define los siguientes sucesos.

a) $A \cup B$

d) $B \cup C \cup D$

b) $A \cap B$

e) $A \cap C$

c) $A \cup B \cup C \cup D$

f) $A \cap B \cup C$

1. Experimentos aleatorios

Un **experimento aleatorio** es aquel del que no se puede predecir su resultado, es decir, que depende de la suerte o el azar.

El **espacio muestral** de un experimento aleatorio está formado por todos los posibles resultados que se pueden producir al realizarlo y se denota E .



NO OLVIDES

Cuando se conoce el resultado de un experimento antes de realizarlo, se dice que es un experimento determinista.

EJEMPLO

1. Decide si estos experimentos son aleatorios. En caso afirmativo, escribe el espacio muestral.
 - a) Medir la temperatura de fusión del hielo.
 - b) Lanzar una moneda y anotar el resultado.
2. En las mismas condiciones físicas, cada vez que se realice el experimento, el resultado será siempre el mismo: la temperatura de fusión del hielo es 0°C . No es un experimento aleatorio.
3. Se saben los posibles resultados, cara y cruz; sin embargo, no se puede predecir el resultado que se va a obtener tras el lanzamiento. Es un experimento aleatorio. El espacio muestral es $E = \{\text{cara, cruz}\}$.

1.1. Métodos de conteo. Diagrama de árbol

Los métodos de conteo son estrategias que se pueden utilizar para determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio.

El **diagrama de árbol** es un método gráfico de conteo que consiste en marcar, como si fueran ramas de un árbol, los posibles resultados de un experimento aleatorio. El espacio muestral se obtiene en las ramas finales.



Determinar el espacio muestral con un diagrama de árbol

Eligiendo al azar un primer plato (pasta o legumbres) y un segundo plato (pescado, carne o huevos) de la carta de un restaurante, ¿cuáles son los posibles menús?



PRIMERO. Se fija la primera posibilidad de elección. En este caso, elegir el primer plato: pasta o legumbres.

SEGUNDO. Se añaden el resto de posibilidades y se escriben los resultados finales.

ACTIVIDADES

1. Pablo escoge al azar entre sus camisetas (roja, azul o verde) y pantalones (negro o blanco). Escribe las diferentes posibilidades que tiene de vestirse.
2. Para merendar unos amigos eligen al azar un bocadillo, de jamón, atún, queso o tortilla, y un refresco de naranja, limón y cola. Escribe el espacio muestral.

2. Sucesos. Operaciones con sucesos

- Un **suceso elemental** es cada uno de los posibles resultados simples del espacio muestral.
- Un **suceso compuesto** es el formado por dos o más sucesos elementales.
- Un **suceso** es **seguro** cuando ocurre siempre, y un **suceso** es **imposible** cuando no ocurre nunca.

EJEMPLO

6. Una urna contiene 4 bolas rojas, 1 negra y 2 verdes. Consideramos el experimento aleatorio de coger una bola al azar y anotar su color.
- Describe el espacio muestral y define sus sucesos elementales.
 - Escribe dos sucesos compuestos.
 - Escribe un suceso seguro y un suceso imposible.
- a) $E = \{R, N, V\}$, cuyos sucesos elementales son $\{R\}$, $\{N\}$ y $\{V\}$.
- b) $A = \text{«Sacar bola roja o verde»} = \{R, V\}$
 $B = \text{«Sacar bola negra o verde»} = \{N, V\}$
- c) Suceso seguro: $C = \text{«Sacar bola roja, negra o verde»}$
Suceso imposible: $D = \text{«Sacar bola azul»}$

DATE CUENTA

Cualquier suceso compuesto se puede expresar como unión de sus sucesos elementales.

Operaciones con sucesos

- La **unión de dos sucesos**, A y B , es otro suceso formado por los sucesos elementales que hay en A o en B , y se escribe $A \cup B$.
- La **intersección de dos sucesos**, A y B , es otro suceso formado por los sucesos elementales comunes de A y de B , y se escribe $A \cap B$.



SE ESCRIBE ASÍ

«Que ocurra A o B » $\rightarrow A \cup B$

«Que ocurran A y B » $\rightarrow A \cap B$

EJEMPLO

7. Si se lanza un dado, expresa como unión o intersección estos sucesos.
- a) $A = \text{«Obtener número par o mayor que 3»} = \{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$
- b) $B = \text{«Obtener múltiplo de 2 o divisor de 4»} = \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 4, 6\}$
- c) $C = \text{«Obtener número par y mayor que 3»} = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$
- d) $D = \text{«Obtener múltiplo de 2 y divisor de 4»} = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 4\} = \{2, 4\}$

ACTIVIDADES

5. En un frutero hay naranjas, manzanas, plátanos y ciruelas. Se escoge una pieza al azar y se anota qué fruta es.
- Escribe el espacio muestral asociado, un suceso seguro y otro imposible.
 - Encuentra y describe dos sucesos compuestos.
6. Se gira una ruleta dividida en 12 sectores numerados del 1 al 12 y se anota el número en el que se ha parado. Expresa como unión o intersección estos sucesos.
- $A = \text{«Obtener número múltiplo de 3 o de 7»}$
 - $B = \text{«Obtener número múltiplo de 2 y de 3»}$
 - $C = \text{«Obtener número divisor de 6 y de 8»}$

Si la intersección de dos sucesos es el suceso imposible, es decir, $A \cap B = \emptyset$, se dice que son **sucesos incompatibles**. En caso contrario, se dice que son compatibles.

EJEMPLO

8. Si se lanza un dado y se anota la puntuación obtenida, decide si estos sucesos son compatibles o incompatibles.

$A = \text{«Obtener número impar»} = \{1, 3, 5\}$

$B = \text{«Obtener múltiplo de 3»} = \{3, 6\}$

$C = \text{«Obtener múltiplo de 2»} = \{2, 4, 6\}$

Los sucesos A y B son compatibles, ya que $A \cap B = \{3\}$.

Los sucesos A y C son incompatibles, ya que $A \cap C = \emptyset$.

Los sucesos B y C son compatibles, ya que $B \cap C = \{6\}$.



DATE CUENTA

Los sucesos incompatibles no pueden ocurrir simultáneamente.

Los sucesos elementales son siempre incompatibles entre sí.

El **suceso contrario** o **complementario** de un suceso A es otro suceso, que se escribe como $\bar{A}$, formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral que no están en A .

La **diferencia de dos sucesos**, $A - B$, es la intersección del primer suceso con el contrario del segundo: $A - B = A \cap \bar{B}$.

DATE CUENTA

La unión de un suceso y su contrario es el espacio muestral.

$$A \cup \bar{A} = E$$

La intersección de un suceso y su contrario es el conjunto vacío.

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Propiedades de las operaciones con sucesos

- El contrario de la unión es la intersección de los contrarios: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
- El contrario de la intersección es la unión de los contrarios: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
- El contrario del suceso contrario coincide con el suceso de partida: $\bar{\bar{A}} = A$.

EJEMPLO

9. Al lanzar un dado, se consideran los sucesos $A = \text{«Obtener número impar»}$ y $B = \text{«Obtener múltiplo de 3»}$. Comprueba que se cumple lo siguiente.

a) $A - B = A \cap \bar{B}$ b) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ c) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ d) $\bar{\bar{A}} = A$

$A = \{1, 3, 5\} \rightarrow \bar{A} = \{2, 4, 6\}$ $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$

$B = \{3, 6\} \rightarrow \bar{B} = \{1, 2, 4, 5\}$ $A \cap B = \{3\}$

a) $A - B = \{1, 5\}$ $A \cap \bar{B} = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 4, 5\} = \{1, 5\}$

b) $\overline{A \cup B} = \{2, 4\}$ $\bar{A} \cap \bar{B} = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 4, 5\} = \{2, 4\}$

c) $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ $\bar{A} \cup \bar{B} = \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 4, 5\} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

d) $\bar{\bar{A}} = \{1, 3, 5\} = A$

PIENSA

¿Cómo tienen que ser dos sucesos A y B para que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$?

ACTIVIDADES

7. Se extrae una carta de la baraja española. Razona si los sucesos A , B , C y D son compatibles o incompatibles.

$A = \text{«Sacar un as»}$

$B = \text{«Sacar un basto»}$

$C = \text{«Sacar un caballo»}$

$D = \text{«Sacar una figura»}$

8. Para el postre se permite escoger manzanas rojas o verdes, ciruelas rojas, peras verdes o amarillas, o plátanos.

Sean los sucesos $A = \text{«Escoger fruta roja»}$, $B = \text{«Escoger manzana»}$ y $C = \text{«Escoger plátano o pera»}$.

a) Halla $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $A - B$, $B - C$, $A \cap \bar{B}$ y $A \cap \bar{C}$.

b) Comprueba que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ y que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Operaciones y relaciones con sucesos

Dados dos sucesos, A y B , se llama:

UNIÓN DE SUCESOS	$A \cup B$ (se lee A unión B) es el suceso formado por todos los casos de A y de B . El suceso $A \cup B$ se verifica cuando ocurre uno de los dos, A o B , o ambos.	
INTERSECCIÓN DE SUCESOS	$A \cap B$ (se lee A intersección B) es el suceso formado por todos los casos que son, a la vez, de A y de B . El suceso $A \cap B$ se verifica cuando ocurren simultáneamente A y B .	
DIFERENCIA DE SUCESOS	$A - B$ (se lee A menos B) es el suceso formado por todos los casos de A que no son de B . $A - B$ se verifica cuando lo hace A y no B .	
SUCESO COMPLEMENTARIO	El suceso $A' = E - A$ se llama suceso contrario o complementario de A . El suceso A' se verifica siempre y cuando no se verifique A . Al suceso A' también se le suele designar con $\bar{A}$.	
SUCESOS INCOMPATIBLES	Dos sucesos, A y B , se llaman incompatibles cuando no tienen ningún caso común. Es decir, cuando $A \cap B = \emptyset$. Los sucesos incompatibles no se pueden verificar simultáneamente.	

Algunas propiedades importantes

- Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$
 - $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 - $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- Estas dos propiedades se llaman **leyes de Morgan** y se utilizan mucho.

La primera se puede leer así: “El complementario de la unión es la intersección de los complementarios”. Y la segunda así: “El complementario de la intersección es la unión de los complementarios”.

Ejercicio resuelto

1 $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$A = \{b, c, d, f, g, h\}$

$B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{a, b\}$

Hallar: $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cup B)'$,

$(A \cap B)'$, $A' \cup B'$, $A' \cap B'$,

$B \cup C$, $B \cap C$.

$A \cup B = \{a, b, c, d, f, g, h\}$, $(A \cup B)' = \{e, i\}$

$A \cap B = \{b, c, d\}$, $(A \cap B)' = \{a, e, f, g, h, i\}$

$A' = \{a, e, i\}$, $B' = \{e, f, g, h, i\}$

$A' \cup B' = \{a, e, f, g, h, i\}$, $A' \cap B' = \{e, i\}$

Observamos que $(A \cup B)' = A' \cap B'$ y que $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Como $C \subset B$, $B \cup C = B$ y $B \cap C = C$.

Ejercicio propuesto

- 2 Consideramos la experiencia “lanzar un dado”. A partir de los conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 4\}$

- a) Obtén los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, A' , B' .

- b) Obtén los conjuntos $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$, $A' \cup B'$, $A' \cap B'$, y comprueba que se cumplen las leyes de Morgan.

- c) Calcula $B \cup C$ y $B \cap C$, y razona los resultados.

3 En una bolsa metemos 10 bolas con las 10 cifras y extraemos una al azar. Consideremos los sucesos A = cifra par, B = múltiplo de tres, C = número primo (el 1 no es primo y el 0 es múltiplo de cualquier número).

- Describe el espacio muestral y los sucesos A , B y C .
- Halla $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$ y $A \cap C$.
- ¿Cuál es el suceso contrario de A ? ¿Y el de B ? ¿Y el de C ?
- Describe el suceso formado por los casos que no están ni en A , ni en B ni en C .

4 Lanzamos dos dados distintos, uno rojo y el otro verde, y observamos sus puntuaciones.

- ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?
- Describe los sucesos A = "El dado rojo ha tenido una puntuación de 1", B = "El dado verde ha tenido un 2", C = "La suma de las puntuaciones ha sido 8".
- ¿Cuál es el suceso $A \cap B$?
- Dos de los sucesos anteriores son incompatibles. ¿Cuáles?

5 Hay dados para rellenar quinielas aleatoriamente que tienen una cara con 2, dos caras con X, y tres caras con 1.

- ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Hay 8 sucesos distintos. Descríbelos:



- Ningún elemento (suceso imposible):
- Un elemento (sucesos elementales):
- Dos elementos:
- Los tres elementos (suceso seguro):