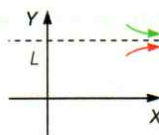


6. Límite de una función en el infinito

Si se considera la expresión algebraica de una función $f(x)$ como el término general de una sucesión, el límite de la función cuando x tiende a infinito coincide con el límite de la sucesión.

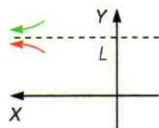
- El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es un número real L cuando para valores muy grandes de x los valores de la función se aproximan al número L .



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si los valores de la función crecen cada vez más.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ si los valores de la función decrecen cada vez más.

- El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ es un número real L cuando para valores muy pequeños de x los valores de la función se aproximan al número L .



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ si los valores de la función crecen cada vez más.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ si los valores de la función decrecen cada vez más.

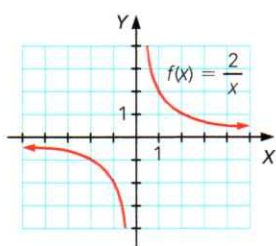
EJEMPLO

10. Calcula el límite de estas funciones cuando x tiende a infinito.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$

b) $f(x) = \frac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7}$

a) Se representa la función para estudiar los valores de $f(x)$.



Cuando x toma valores muy grandes, $x \rightarrow +\infty$, $f(x)$ se aproxima a 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Cuando x toma valores muy pequeños, $x \rightarrow -\infty$, $f(x)$ también se aproxima a 0.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

b) A partir del cálculo de límites para las sucesiones, se sustituye x por n , cuando $x \rightarrow +\infty$, o por $-n$, cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 2n}{n^3 - 7} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(-n)^3 + 2(-n)}{(-n)^3 - 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n^3 - 2n}{-n^3 - 7} = \frac{-4}{-1} = 4$$



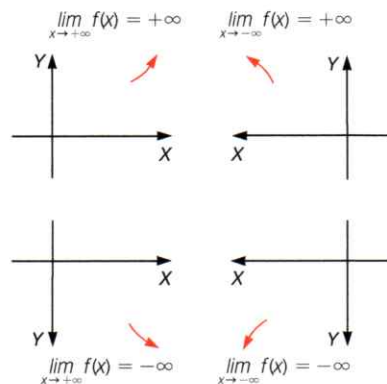
SE ESCRIBE ASÍ

El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es L .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ es $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



DATE CUENTA

En la práctica, el grado de los polinomios decide el límite, por lo que la sustitución de x por ∞ no se realiza y se da el resultado directamente.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7} = \frac{4}{1} = 4$$

ACTIVIDADES

17. Calcula estos límites.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2 - 6x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x(x^2 - 1)}{2 - x^2}$

18. Halla los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-1} - x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-1}{2+3x} \right)^{3x^2}$

7. Límite de una función en un punto

7.1. Límites laterales

Para estudiar cómo se aproxima una función a un punto hay que considerar la aproximación por la izquierda, con valores menores que él, y por la derecha, con valores mayores. Estas aproximaciones se llaman **límites laterales** en un punto.

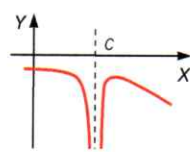
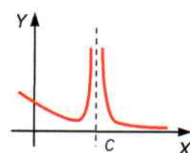
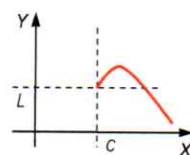
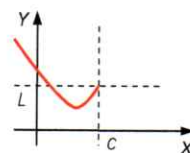
- El **límite de una función** $f(x)$ cuando x tiende a un punto c por la **izquierda** es un número real L cuando para valores de x muy próximos a c y menores que c los valores de la función se aproximan a L .

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

- El **límite de una función** $f(x)$ cuando x tiende a un punto c por la **derecha** es un número real L cuando para valores de x muy próximos a c y mayores que c los valores de la función se aproximan a L .

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

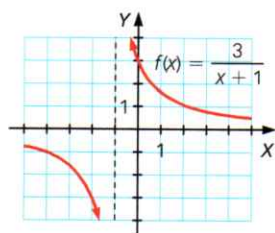
- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$ cuando para valores muy próximos a c , menores que c o mayores que c , respectivamente, los valores de la función crecen cada vez más.
- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$ o $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$ cuando para valores muy próximos a c , menores que c o mayores que c , respectivamente, los valores de la función decrecen cada vez más.



EJEMPLOS

11. Calcula los límites laterales de la función $f(x) = \frac{3}{x+1}$ en $x = -1$.

Se representa la función para estudiar qué valores toma $f(x)$ para valores muy cercanos a -1 por la derecha y por la izquierda.



Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3}{x+1} = -\infty$$

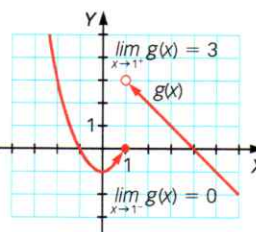
Límite por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3}{x+1} = +\infty$$

12. Halla los límites laterales de $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$.

Límite por la izquierda: $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0$

Límite por la derecha: $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 4) = -1 + 4 = 3$



Los límites laterales no coinciden.



SE ESCRIBE ASÍ

El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a c por la izquierda es L .

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a c por la derecha es $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$$

ACTIVIDADES

19. Halla los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $\frac{-2x+1}{x-1}$ en $x = 1$

b) $\frac{x}{|x|}$ en $x = 0$

20. Indica cuáles son los límites laterales en $x = -2$ de la siguiente función.

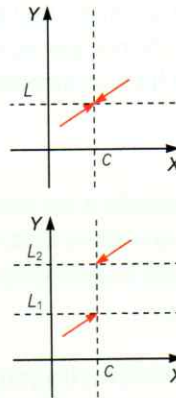
$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & \text{si } x < -2 \\ 1 - x^2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

7.2. Límite de una función en un punto

- El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a un punto c es un número real L cuando $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

- De la misma manera, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$ o $-\infty$ cuando los límites laterales son iguales a estos valores.
- Si $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$, se dice que **no existe** el límite de la función $f(x)$ en el punto c .



SE ESCRIBE ASÍ

El límite de una función $f(x)$ en el punto c es L .

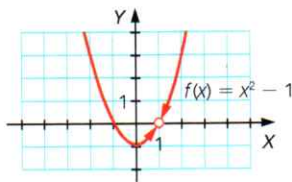
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

No existe el límite de una función $f(x)$ en el punto c .

$$\nexists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

EJEMPLO

13. Determina el límite de la función $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 1$.



Si se representa la función, se ve que en valores próximos a 1 por la derecha y por la izquierda f tiende al valor 0.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0$$

Es decir, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$.

DATE CUENTA

Para comprobar el signo de $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, se sustituye x en la función por un valor próximo a 2 y menor que 2.

$$\frac{x+2}{x-2} = \frac{1,99+2}{1,99-2} < 0$$

$x = 1,99$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x-2} = -\infty$$

Se hace lo mismo para $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

$$\frac{x+2}{x-2} = \frac{2,01+2}{2,01-2} > 0$$

$x = 2,01$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty$$

Calcular el límite de una función en un punto

Determina el límite de la función $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ en $x = -1$ y en $x = 2$.

PRIMERO. Se sustituye en la función x por el valor del cual se quiere calcular el límite. Si se obtiene un número, ese es el resultado del límite.

Para $x = -1$: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x-2} = \frac{-1+2}{-1-2} = -\frac{1}{3}$

Para $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-2} = \frac{2+2}{2-2} = \frac{4}{0} = \infty$

SEGUNDO. Si se obtiene ∞ , es necesario calcular los límites laterales.

Para $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x-2} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

ACTIVIDADES

21. Halla los límites de las funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-2x+3}$ en $x = 1$

b) $f(x) = \frac{2-x}{x+1}$ en $x = -1$

22. Razona si existe o no el límite de la función

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3} + \frac{x+3}{x-2} \text{ en los puntos.}$$

a) $x = 2$

c) $x = -3$

e) $x = -2$

b) $x = 3$

d) $x = 4$

f) $x = -4$

O

Calcular el límite en una función definida a trozos

Calcula el límite de $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq -1 \\ -2x^2+4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ en $x = -1$ y en $x = 0$.

PRIMERO. Se comprueba si en el punto cambia la expresión algebraica.

En $x = -1$ la expresión algebraica sí cambia y en $x = 0$ no cambia.

SEGUNDO. Se calcula el límite teniendo en cuenta si cambia la expresión algebraica o no.

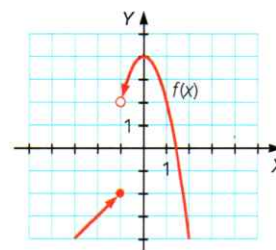
- Si la expresión algebraica cambia, se calculan los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (x-1) = -1-1 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (-2x^2+4) = -2 \cdot (-1)^2 + 4 = 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No existe el límite.}$$

- Si la expresión algebraica no cambia, se sustituye la variable x por el punto.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-2x^2+4) = -2 \cdot 0 + 4 = 4$$

$\uparrow$
 $0 > -1$



Los límites laterales en $x = -1$ no coinciden.

7.3. Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

Esta indeterminación suele aparecer al calcular límites de cocientes de polinomios, $\frac{P(x)}{Q(x)}$, en un punto c en el que $P(c) = 0$ y $Q(c) = 0$. Para resolverla hay que factorizar los polinomios del numerador y del denominador y simplificar.



RECUERDA

Si un polinomio $P(x)$ toma el valor 0 en $x = c$, entonces es divisible entre $(x - c)$.

$$P(c) = 0 \rightarrow P(x) = (x - c) P_1(x)$$

O

Resolver límites con una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$.

PRIMERO. Se determina si el límite presenta el tipo de indeterminación $\frac{0}{0}$, sustituyendo la variable por el punto.

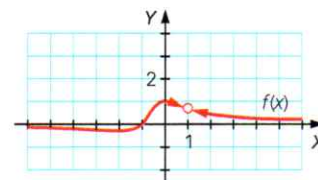
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \frac{1^2 - 1}{1^3 - 1} \rightarrow \frac{0}{0}$$

SEGUNDO. Se factorizan los polinomios del numerador y del denominador y se simplifica la fracción algebraica.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

TERCERO. Se vuelve a calcular el límite.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1+1}{1^2+1+1} = \frac{2}{3}$$



Los límites laterales en $x = 1$ coinciden.

ACTIVIDADES

- 23 Calcula el límite de $f(x)$ en $x = 0$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x-2}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 24 Halla el valor de los límites que aparecen a continuación.

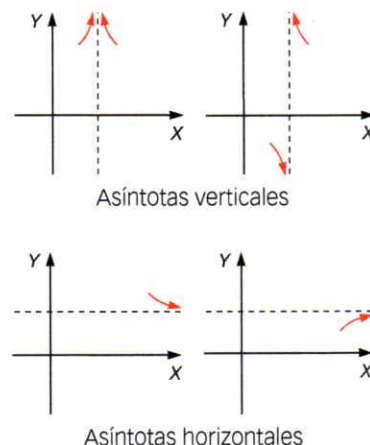
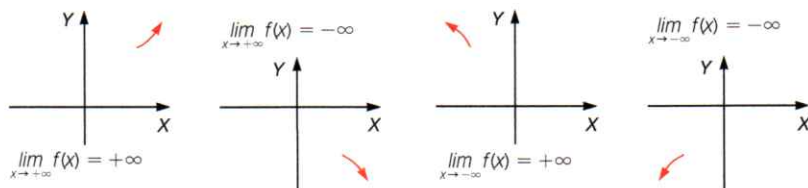
a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$

8. Ramas infinitas. Asíntotas

En la gráfica de una función pueden existir tramos en los que la función se aleja indefinidamente. Estos tramos se llaman **ramas infinitas** de la función.

- Cuando una rama infinita se acerca indefinidamente a una recta, esa recta se llama **asíntota**, y la rama infinita, **rama asintótica**.
- Cuando una rama infinita no se acerca a ninguna recta, se denomina **rama parabólica**.



8.1. Asíntotas horizontales

Una función $f(x)$ tiene una **asíntota horizontal** en $y = k$ si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$.

Calcular las asíntotas horizontales de una función

Halla la asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x}$ y estudia la posición de la rama infinita con respecto a ella.

PRIMERO. Se calcula el límite de la función cuando $x \rightarrow \infty$. Si el resultado es distinto de $+\infty$ o $-\infty$, la función tiene una asíntota horizontal.

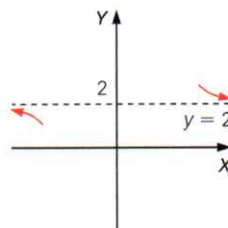
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x} = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = 2.$$

SEGUNDO. Para determinar la situación de la rama infinita con respecto a la asíntota, se calcula el signo de $f(x) - k$ para valores de x positivos y negativos con valor absoluto muy grande.

$$f(x) - k = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x} - 2 = \frac{6x + 1}{x^2 - 3x}$$

$$x \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{6x + 1}{x^2 - 3x} > 0 \rightarrow f(x) \text{ por encima de la asíntota.}$$

$$x \rightarrow -\infty \rightarrow \frac{6x + 1}{x^2 - 3x} < 0 \rightarrow f(x) \text{ por debajo de la asíntota.}$$



CALCULADORA

Para saber cómo se comporta la función cuando $x \rightarrow +\infty$, se dan valores muy grandes a x . Por ejemplo, para $x = 1000$ se tiene:

$$\frac{6 \cdot 1000 + 1}{1000^2 - 3 \cdot 1000} > 0$$

Se hace lo mismo con valores negativos cuando $x \rightarrow -\infty$.

ACTIVIDADES

25 Pon un ejemplo de una función que cumpla que:

- Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.
- Tiene una asíntota horizontal en $y = 2$.
- Tiene una asíntota horizontal en $y = -1$.
- No tiene asíntotas horizontales.

26 ¿Una función puede tener dos asíntotas horizontales diferentes? ¿Y tres?

27 Halla las asíntotas horizontales de las funciones que aparecen a continuación.

a) $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2x^2 - 1}$

d) $f(x) = \frac{2x - 1}{x}$

b) $f(x) = \frac{1 - 2x^3}{4x^3 - 2x}$

e) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

c) $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 5}$

f) $f(x) = \frac{5 - x}{2x - x^4 + 1}$

8.2. Asintotas verticales

Una función $f(x)$ tiene una **asíntota vertical** en $x = c$ si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm \infty$.



Calcular las asíntotas verticales de una función racional

Halla las asíntotas verticales de la función $f(x) = \frac{1-x}{x-2}$ y estudia la posición de la rama infinita con respecto a ella.

PRIMERO. Se determinan las raíces del denominador y se calcula el límite de la función en ellas. Si el resultado es ∞ , la función tiene una asíntota vertical en ese punto.

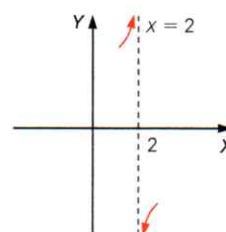
$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x}{x-2} = \infty \rightarrow f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 2.$$

SEGUNDO. Se hallan los límites laterales para conocer la situación de la rama infinita con respecto a la asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-x}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x}{x-2} = -\infty$$



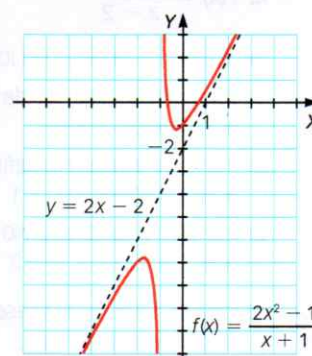
8.3. Asintotas oblicuas

Una función $f(x)$ tiene una **asíntota oblicua** en $y = mx + n$ si:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = n$$

DATE CUENTA

Al igual que en la asíntota horizontal, para determinar la posición de las ramas infinitas con respecto a la asíntota oblicua, se calcula el signo de $f(x) - (mx + n)$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.



Calcular las asíntotas oblicuas de una función

Estudia si la función $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$ tiene asíntotas oblicuas.

PRIMERO. Se calcula el límite cuando $x \rightarrow \infty$ de la expresión $\frac{f(x)}{x}$. Si el resultado es un número, m , distinto de 0, existe asíntota oblicua.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 1}{x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x} = 2 \neq 0 \rightarrow m = 2$$

SEGUNDO. Si existe asíntota oblicua, se calcula el límite de $f(x) - mx$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^2 - 1}{x + 1} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x - 1}{x + 1} = -2$$

Por tanto, $f(x)$ tiene una asíntota oblicua, que es $y = 2x - 2$.

ACTIVIDADES

- 28 Halla las asíntotas verticales de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$ b) $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$ c) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 1}$

- 29 Halla, si es que tienen, las asíntotas oblicuas de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ b) $f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$ c) $f(x) = \frac{3x^3 + 2x}{x^2 - 9}$

9. Continuidad de una función

Una función $f(x)$ es **continua en un punto** $x = a$ si se cumple que:

- Existe $f(a)$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
- $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Si una función no es continua en un punto, se dice que la función presenta una **discontinuidad** en ese punto.

Una función es **continua en un intervalo** si es continua en todos los puntos del intervalo.

9.1. Continuidad en las funciones elementales

- Las **funciones polinómicas** son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las **funciones racionales** no son continuas en los puntos que anulan el denominador.
- Las **funciones con radicales** de índice par no existen en los valores que hacen el radicando negativo. Si el índice es impar, son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las **funciones exponenciales** son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las **funciones logarítmicas** no son continuas en los puntos en los que el argumento del logaritmo es cero o un número negativo.
- De las **funciones trigonométricas**, la única función que no es continua es $f(x) = \operatorname{tg} x$, ya que no existe en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.



Estudiar la continuidad de una función elemental

Estudia la continuidad de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{1-x}{x-2}$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$

c) $f(x) = \log(x+3)$

PRIMERO. Se determinan los puntos en los que la función no está definida.

- a) Función racional. No definida cuando se anula el denominador.
 $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$
- b) Función radical. No definida cuando el radicando es negativo.
 $x + 1 < 0 \rightarrow x < -1$
- c) Función logarítmica. No definida para 0 y números negativos.
 $x + 3 \leq 0 \rightarrow x \leq -3$

SEGUNDO. La función presenta discontinuidades en los puntos que se han calculado y es continua en el resto.

- a) Continua en $\mathbb{R} - \{2\}$
- b) Continua en $[-1, +\infty)$
- c) Continua en $(-3, +\infty)$

ACTIVIDADES

- 30 Estudia la continuidad de las funciones que aparecen a continuación.

a) $f(x) = x^{-2}$ b) $f(x) = \sqrt{x-4}$ c) $f(x) = \ln(1-x^2)$

- 31 Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ b) $f(x) = e^{x+1}$ c) $f(x) = \operatorname{sen} x^2 - 1$

9.2. Tipos de discontinuidades

Discontinuidad evitable

Decimos que hay una discontinuidad evitable en a cuando existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, es decir, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, pero ocurre una de estas dos condiciones:

- El límite no coincide con el valor de la función en ese punto.

$$f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

- La función no está definida en ese punto.

Discontinuidad de salto finito

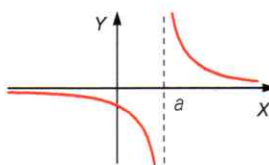
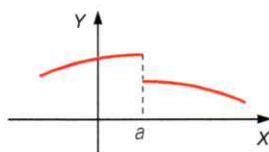
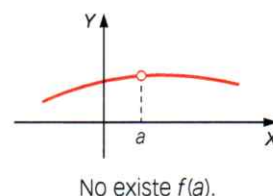
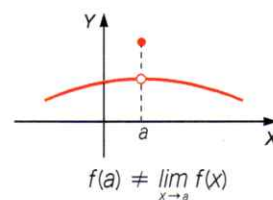
Se produce cuando en un punto, a , no existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ debido a que, aunque existen los límites laterales, estos no coinciden.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Discontinuidad de salto infinito

Existe cuando en un punto, a , la función tiene una asíntota vertical. Es decir, uno o los dos límites laterales son infinito.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$



EJEMPLO

14. Estudia la continuidad de esta función y clasifica sus puntos de discontinuidad.

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x-2}{x^2-4} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

La función puede presentar puntos de discontinuidad en el punto de paso de una expresión a otra, $x = -1$, y en los puntos que anulan el denominador de la función racional, $x = 2$ y $x = -2$.

Para $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{2-2}{2^2-4} \rightarrow \frac{0}{0} \rightarrow$ No existe $f(2)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x-2}}{(x-\cancel{2})(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

Discontinuidad evitable. $f(x)$ sería continua en $x = 2$ haciendo $f(2) = \frac{1}{4}$.

Para $x = -2$: Aunque anula el denominador de la función racional, el punto $x = -2$ está en la parte definida por $x + 3$, luego la función es continua en este punto.

Para $x = -1$: $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 3) = -1 + 3 = 2$ $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{-1-2}{(-1)^2-4} = 1$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \rightarrow$ Discontinuidad de salto finito

DATE CUENTA

- La discontinuidad evitable se llama así porque, redefiniendo el valor de la función en ese punto, la función se vuelve continua.
- Si una función racional tiene una discontinuidad evitable en $x = a$, la fracción se puede simplificar dividiendo entre $(x - a)$.
- La discontinuidad de salto finito es frecuente en las funciones definidas a trozos, en los puntos en los que la función cambia su expresión algebraica.
- En la discontinuidad de salto infinito existe una asíntota vertical en $x = a$.

ACTIVIDADES

32. Estudia la continuidad de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

33. Indica los tipos de discontinuidad que presenta $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ 2x-3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$