

7

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

7.1 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

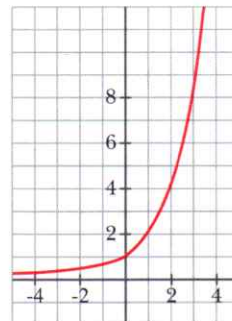
RECUERDA

- Se llama **función exponencial** a aquella cuya ecuación es $y = a^x$, siendo la base a un número real positivo y distinto de 1.
- Es una función continua, su dominio de definición es $\mathbb{R}$ y pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$, cualquiera que sea a .
- Si $a > 1$, es una función creciente, y si $0 < a < 1$, es una función decreciente.
- Para cualquier valor que demos a x , la y es positiva ($a^x > 0$).

1 Esta gráfica y esta tabla de valores corresponden a la función exponencial $y = 2^x$.

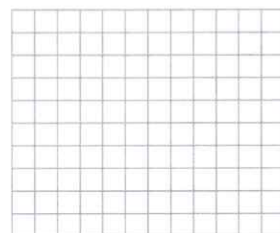
- ¿Cuál es el dominio de esta función?
- Halla con la calculadora $f(-10)$ y $f(-50)$. ¿A qué valor se aproxima la y si x tiende a $-\infty$?
- Calcula $f(10)$ y $f(20)$.
Si x tiende a infinito, ¿a qué tiende y ?
- ¿Es una función creciente o decreciente?
- ¿Hay algún valor de x para el cual la y sea negativa?

x	y
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8
3,5	11,31



2 Haz una tabla de valores y representa la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

- ¿Cuál es su dominio de definición?
- Si x tiende a menos infinito, ¿a qué tiende y ?
- Si x tiende a infinito, ¿a qué valor tiende y ?

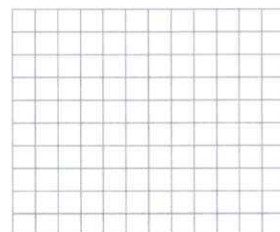
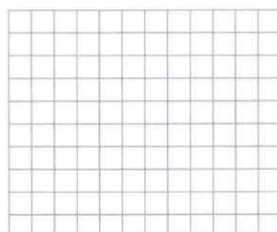
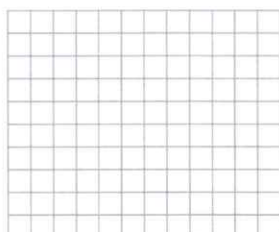


3 Representa, utilizando la calculadora, estas funciones:

a) $y = 1,4^x$

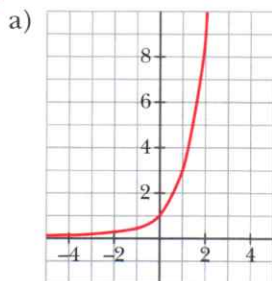
b) $y = 0,75^x$

c) $y = \left(\frac{5}{4}\right)^x$

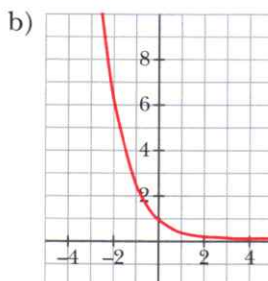


4 Di cuál es la tendencia de cada una de las funciones del ejercicio anterior cuando x tiende a menos infinito y cuando x tiende a infinito.

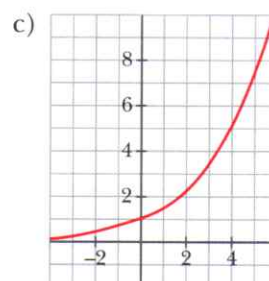
5 Asocia a cada gráfica su expresión analítica:



I) $y = 1,5^x$

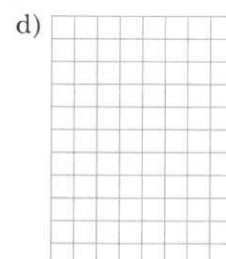
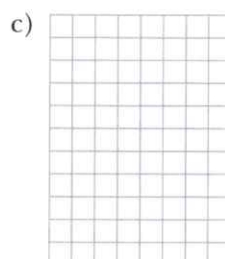
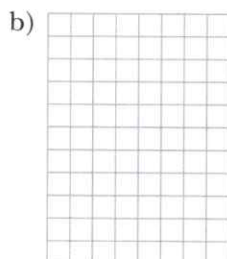
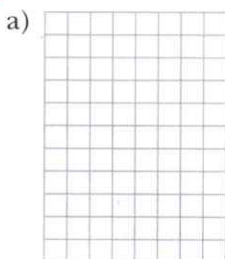


II) $y = 3^x$



III) $y = 0,4^x$

6 Representa las funciones: a) $y = 0,3 \cdot 2^x$ b) $y = 5 \cdot 0,7^x$ c) $y = 2,7^x$ d) $y = 3 \cdot 0,5^x$



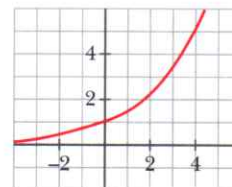
7 En cada una de las funciones del ejercicio anterior, indica:

a) Si es creciente o decreciente.

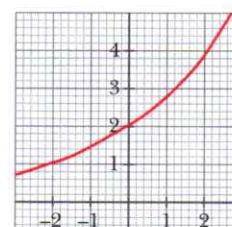
b)Cuál es su tendencia cuando x tiende a menos infinito y cuando x tiende a infinito.

8 La función exponencial $y = ka^x$ pasa por los puntos $(0, 5)$ y $(2, 20)$. Calcula k y a .

9 Esta gráfica corresponde a una función del tipo $y = a^x$.
Calcula a .



10 Calcula los valores de k y a en la expresión $y = ka^x$, sabiendo que corresponde a una función cuya gráfica es la que tienes a la derecha.



7.2 PROBLEMAS

- 1** Una empresa deposita en un banco un millón de euros a interés compuesto del 6% anual. Esto significa que:

- Al terminar el primer año tendrá: $1 + 1 \cdot \frac{6}{100} = 1,06$
- Al terminar el segundo año tendrá: $1,06 + 1,06 \cdot 0,06 = 1,06 (1 + 0,06) = 1,06^2$

a) ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 4 años?

b) Escribe la función que da el dinero que tendrá al cabo de t años.

- 2** En el contrato de alquiler de un apartamento figura que se le subirá al inquilino un 7% anual. Si el precio era de 250 € mensuales el primer año, ¿cuál será el alquiler 5 años después?

- 3** Óscar se ha comprado un coche que le ha costado 15 000 € y sabe que ese modelo se deprecia a un ritmo de un 15% anual. Calcula el precio de ese coche dentro de 3 años.

Halla la fórmula que proporciona el precio del coche en función de los años transcurridos.

- 4** El polonio es una sustancia radiactiva. Si tenemos una cantidad de C_0 gramos, se puede comprobar experimentalmente que, en 140 días, esta se reduce a la mitad, $\frac{C_0}{2}$ g. Al cabo de otros 140 días tendremos $\frac{C_0}{4}$ g, y así sucesivamente.

¿Cuál será la función que da la cantidad de polonio que queda cuando hayan pasado t días?

- 5** En un laboratorio estudian cada hora un cultivo de bacterias y obtienen los siguientes datos:

TIEMPO (horas)	0	1	2	3
BACTERIAS (miles)	4,5	5,4	6,48	7,78

- a) Obtén la función exponencial ($y = k a^x$) de crecimiento del cultivo si se mantiene el mismo ritmo.
- b) ¿Cuántas bacterias habrá después de 10 horas de iniciado el cultivo?

- 6** Sabes que la inflación es la pérdida del valor adquisitivo del dinero. Con una inflación del 8% anual, lo que el año pasado costaba 100 €, hoy costará 108 €.

Si la inflación se mantiene en un 8% anual, ¿cuánto costará dentro de 6 años un piso que hoy cuesta 150 000 €?

- 7** Un elemento radiactivo tiene un periodo de semidesintegración de 6 meses. Tenemos 8 gramos de ese elemento. Escribe la ecuación que expresa la cantidad de sustancia radiactiva en función del tiempo transcurrido en años.

- 8** En un bosque, en la etapa de crecimiento, se mide el volumen de madera (biomasa) y se obtiene $10\,250\text{ m}^3$. Se observa que el bosque crece a un ritmo de un 2,5% al año.

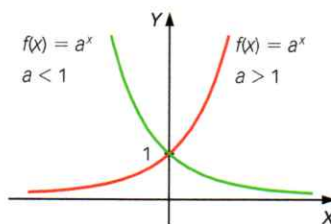
- a) ¿Qué cantidad de madera habrá dentro de 5 años?
- b) ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la cantidad de madera si sigue creciendo al mismo ritmo?

10. Funciones exponenciales

Las **funciones exponenciales** más sencillas son del tipo $f(x) = a^x$, donde a es un número real positivo ($a > 0$) y distinto de 1 ($a \neq 1$).

Características

- El dominio de una función exponencial es $\mathbb{R}$.
- Su recorrido es $(0, +\infty)$.
- Como $a^0 = 1$, la función pasa siempre por el punto $(0, 1)$.
- Como $a^1 = a$, la función pasa siempre por el punto $(1, a)$.
- Si $a > 1$, la función es creciente.
- Si $0 < a < 1$, la función es decreciente.



NO OLVIDES

Una función exponencial muy utilizada es $f(x) = e^x$, siendo $e = 2,718281\dots$

Estas funciones aparecen habitualmente al describir numerosos procesos demográficos, económicos, biológicos, químicos...

Representar una función exponencial

Representa gráficamente estas funciones.

a) $f(x) = 2^x$

b) $g(x) = 0,5^x$

PRIMERO. Se consideran las características de las funciones exponenciales.

- Pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$.
 - a) Pasa por $(0, 1)$ y $(1, 2)$.
 - b) Pasa por $(0, 1)$ y $(1; 0,5)$.
- Si $a > 1$, es creciente. Y si $0 < a < 1$, es decreciente.
 - a) $a = 2 > 1 \rightarrow f(x)$ es creciente.
 - b) $0 < a = 0,5 < 1 \rightarrow g(x)$ es decreciente.

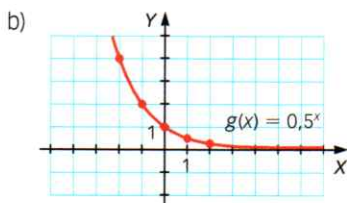
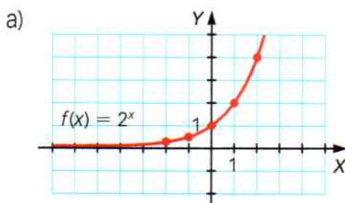
SEGUNDO. Se construye una tabla de valores para la función.

a)

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	0,25	0,5	2	4

x	-2	-1	1	2
$g(x)$	4	2	0,5	0,25

TERCERO. Se representan todos los puntos obtenidos en los pasos anteriores y se unen mediante una curva.

**PIENSA**

Calcula la
función inversa
de $f(x) = e^{x^2}$.

ACTIVIDADES

- 21** Razona, sin hacer la gráfica, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

a) $f(x) = 1,2^x$

d) $f(x) = 0,8^x$

b) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

e) $f(x) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$

c) $f(x) = e^x$

f) $f(x) = (\sqrt{3})^x$

- 22** Haz una tabla de valores y representa gráficamente estas funciones.

a) $f(x) = 3^x$

c) $f(x) = 3^{-x}$

$$\text{e) } f(x) = \left(-\frac{2}{3}\right)^x$$

b) $f(x) = -3^x$

d) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

f) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$