

2.2 Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas

Un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas es de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \begin{array}{l} x, y \text{ y } z \text{ son las incógnitas.} \\ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2 \text{ y } c_3, \text{ sus coeficientes.} \\ d_1, d_2 \text{ y } d_3, \text{ los términos independientes.} \end{array}$$

Para resolver este tipo de sistemas se pueden despejar las incógnitas una a una y sustituir su valor en la ecuación siguiente.

EJEMPLO

4. Resuelve este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 5x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

Se despeja una incógnita en una ecuación y se sustituye su valor en la siguiente ecuación.

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 5x + y + 2z = 4 \end{cases} \rightarrow x = -1 - 2y + z$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 5x + y + 2z = 4 \end{cases} \xrightarrow{x = -1 - 2y + z} \begin{array}{l} 2(-1 - 2y + z) - y + 3z = 3 \rightarrow \\ \rightarrow -2 - 4y + 2z - y + 3z = 3 \rightarrow \\ \rightarrow -5y + 5z = 5 \rightarrow y = \frac{5z - 5}{5} = z - 1 \end{array}$$

Se sustituye el valor de y en el valor de x para obtener las dos incógnitas en función de la tercera variable, z .

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 5x + y + 2z = 4 \end{cases} \xrightarrow{y = z - 1} \begin{array}{l} x = -1 - 2y + z \xrightarrow{y = z - 1} x = -1 - 2(z - 1) + z = 1 - z \\ \rightarrow y = z - 1 \end{array}$$

Se traslada el valor de estas dos incógnitas a la última ecuación y se resuelve la ecuación de primer grado resultante.

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 5x + y + 2z = 4 \end{cases} \xrightarrow{\begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = z - 1 \end{array}} \begin{array}{l} 5(1 - z) + (z - 1) + 2z = 4 \\ 5 - 5z + z - 1 + 2z = 4 \rightarrow -2z = 0 \rightarrow z = 0 \end{array}$$

Se calcula el valor de las otras dos incógnitas.

$$x = 1 - z \xrightarrow{z = 0} x = 1$$

$$y = z - 1 \xrightarrow{z = 0} y = -1$$

La solución del sistema de ecuaciones es $x = 1, y = -1, z = 0$.

PIENSA

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

¿Es un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas?
¿Cuántas soluciones tiene?

ACTIVIDADES

9. Halla la solución de estos sistemas.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ -x + y + z = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y + 5z = 4 \\ -2x + 3y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

10. Resuelve los siguientes sistemas.

$$\text{a) } \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x - y - 2z = 4 \\ x + 3y + z = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

2.2 Método de Gauss

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales se puede utilizar el método de Gauss, que consiste en encontrar, mediante las transformaciones adecuadas, otro sistema equivalente en el que cada una de las ecuaciones tiene, al menos, una incógnita menos que la anterior.

Para conseguirlo se pueden utilizar las siguientes transformaciones.

- Cambiar el orden de dos ecuaciones.
- Multiplicar o dividir los dos miembros de una ecuación por un mismo número.
- Cambiar una ecuación por la suma de ella más otra multiplicada por un número.



Resolver un sistema de tres ecuaciones por el método de Gauss

Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 7 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

PRIMERO. Se elige una ecuación en la que uno de los coeficientes de las incógnitas sea 1, -1 o un divisor de los demás coeficientes de la misma incógnita.

En este caso se elige la segunda ecuación y se pone la primera ($E_1 \leftrightarrow E_2$).

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 7 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 7 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

SEGUNDO. Se elimina la incógnita elegida de la 2.ª y 3.ª ecuaciones multiplicando la 1.ª por el número adecuado y sumándolas o restándolas.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 7 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} E_2 = E_2 - 2E_1 \\ E_3 = E_3 - 3E_1 \end{matrix}} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 4z = 7 \\ -y - z = 1 \end{cases}$$

TERCERO. Se repite el proceso para eliminar una incógnita de la 3.ª ecuación.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 4z = 7 \\ -y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow{E_3 = E_3 - E_2} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 4z = 7 \\ 3z = -6 \end{cases}$$

CUARTO. Se resuelven las ecuaciones, empezando por la última, y se sustituyen los valores calculados a medida que se asciende.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 4z = 7 \\ 3z = -6 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} z = -2 \\ y = 1, z = -2 \end{matrix}} \begin{cases} x + 1 - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ -y - 4(-2) = 7 \rightarrow y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = 1, y = 1, z = -2$.



SE ESCRIBE ASÍ

En un sistema de ecuaciones se designa $E_1, E_2, E_3, \dots$ a sus ecuaciones.

- Para cambiar de orden dos ecuaciones, por ejemplo, intercambiar la 1.ª y la 2.ª ecuaciones, se escribe:

$$E_1 \leftrightarrow E_2$$

- Para sustituir una ecuación por la suma o resta de otras dos ecuaciones, por ejemplo, sustituir la 3.ª ecuación por la resta de la 3.ª ecuación menos la 1.ª ecuación multiplicada por 4, se escribe:

$$E_3 = E_3 - 4E_1$$

PIENSA

¿Se puede utilizar el método de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas?

ACTIVIDADES

11 Resuelve estos sistemas.

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 19 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 6z = 0 \\ 3x + 4y + z = 0 \end{cases}$

12 Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - y = 1 \\ 5x + 7y - 3z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y - 4z = -1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

6. Discusión de un sistema por el método de Gauss

6.1. Expresión matricial de un sistema

Un sistema de ecuaciones lineales puede expresarse solo con los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes.

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array} \right\} \text{ se puede expresar como } \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array} \right).$$

A esta forma de expresar un sistema se le llama **expresión matricial del sistema**.



Resolver un sistema expresado matricialmente por el método de Gauss

Expresa el sistema de forma matricial y resuélvelo:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - 2z = 7 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{array} \right\}$$

PRIMERO. Se escribe el sistema utilizando solo los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes (forma matricial).

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - 2z = 7 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

SEGUNDO. Se elige una fila en la que el primer número sea 1, -1 o un divisor de los demás números de esa columna, y se realizan las operaciones necesarias para que las filas 2.ª y 3.ª tengan un cero en primer lugar.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\begin{array}{l} E_2 = E_2 - 2E_1 \\ E_3 = E_3 - 3E_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

TERCERO. Se utiliza la segunda fila para, de la misma manera, convertir en cero el segundo lugar de la última fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3 = E_3 - E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array} \right)$$

CUARTO. Se transforma el resultado en sistema de ecuaciones y se resuelve.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ -y - 4z = 7 \\ 3z = -6 \end{array} \right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} y = 1, z = -2 \\ z = -2 \end{array}} \left. \begin{array}{l} x + 1 - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ -y - 4(-2) = 7 \rightarrow y = 1 \\ z = -2 \end{array} \right\}$$

La solución del sistema es $x = 1, y = 1, z = -2$.



NO OLVIDES

Para resolver un sistema expresado de forma matricial por el método de Gauss se utilizan las mismas transformaciones que con las ecuaciones:

- Cambiar de orden dos filas (ecuaciones).
- Cambiar una fila (ecuación) por la suma de ella más otra multiplicada por un número.

ACTIVIDADES

13 Expresa de forma matricial y resuelve.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x + 4y + 5z = 2 \\ x - y + 2z = -6 \\ -2x - y + z = 8 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y = 7 \end{array} \right\} \end{array}$$

14 Expresa de forma matricial y resuelve.

$$\begin{array}{ll} \left. \begin{array}{l} x - y = 3 \\ x - z = 2 \\ y - z = -1 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x - y + z = 1 \\ x + 3y - z = 2 \\ 4x + 2y = 1 \end{array} \right\} \end{array}$$

6.2. Discusión de un sistema utilizando el método de Gauss

Para discutir un sistema mediante el método de Gauss, una vez terminado el proceso, hay que fijarse en su última fila.

- Si el coeficiente de alguna incógnita es distinto de cero, el sistema tiene una única solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

- Si solo aparecen ceros, el sistema tiene infinitas soluciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si todos los coeficientes de las incógnitas son cero pero el término independiente es distinto de cero, el sistema no tiene solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$



RECUERDA

- Sistema compatible determinado: tiene una única solución.
- Sistema compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones.
- Sistema incompatible: no tiene solución.

PIENSA

¿Puede ser compatible determinado un sistema cuyos términos independientes sean todos cero?

EJEMPLO

5. Resuelve y clasifica el sistema
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 3x - 2y + z = -4 \\ -x - y = 1 \end{cases}$$

Se expresa el sistema en su forma matricial y se resuelve con el método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 3x - 2y + z = -4 \\ -x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Se sube la última fila al principio, ya que su primer coeficiente es -1 .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Se hace cero el primer término de la segunda y tercera filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} E_2 = E_2 + 3E_1 \\ E_3 = E_3 + 2E_1 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Utilizando la segunda fila, se anula el segundo término de la tercera fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3 = E_3 - E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

El sistema es incompatible, por tanto, no tiene solución.

PIENSA

¿De qué tipo es un sistema que se corresponde con esta matriz?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ACTIVIDADES

15. Determina el número de soluciones de estos sistemas.

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x + 4y - z = 2 \\ 3x - y + z = 1 \\ -2x + y - z = 0 \end{cases} & \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ 2y - 3z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

16. Discute estos sistemas y resuélvelos.

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} y - 3z = 3 \\ 3y - 2z = 2 \\ x + 5y - 5z = 4 \end{cases} & \quad \text{b) } \begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 2x - 2y - z = 2 \\ x + y - 5z = -2 \end{cases} \end{aligned}$$