

2.1 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS. MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir el resultado en la otra.

Ejercicio resuelto

Resuelve este sistema por el método de sustitución:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \quad \bullet \text{ Despejamos la } y \text{ en la segunda ecuación:}$$

$$y = 3x - 2 \quad (*)$$

- Sustituimos y por $3x - 2$ en la primera ecuación:

$$2x - 3(3x - 2) = -1 \rightarrow 2x - 9x + 6 = -1 \rightarrow -7x = -7 \rightarrow x = 1$$

- Llevamos este valor, $x = 1$, a (*): $y = 3 \cdot 1 - 2 = 1$

- Solución: $x = 1, y = 1$

- Comprobamos la solución: $\begin{cases} 2 - 3 = -1 \\ 3 - 1 = 2 \end{cases}$

1. Resuelve por el método de sustitución.

a) $\begin{cases} x = 3 - y \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$ Sustituye x en la 2.ª ecuación.

b) $\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ y = x + 1 \end{cases}$ Sustituye y en la 1.ª ecuación.

c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$ Despeja x en la 1.ª ecuación.

d) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ Despeja y en la 2.ª ecuación.

e) $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ y = \frac{x+1}{2} \end{cases} \rightarrow 3x + 2\left(\frac{x+1}{2}\right) = 9$

f) $\begin{cases} 7x - y = 12 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \rightarrow 7x - 12 = y$

g) $\begin{cases} 6x + y = 12 \\ x - 7y = 2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases} \rightarrow x = \frac{1+3y}{2}$

2.1 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS. MÉTODO DE REDUCCIÓN

El **método de reducción** consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por números, de forma que al sumarlas desaparezca una de las incógnitas.

Ejercicio resuelto

Resuelve por reducción este sistema:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x + 4y = -6 \end{cases}$$

- Multiplicamos la primera ecuación por -2 .
$$\begin{cases} -6x - 4y = -4 \\ x + 4y = -6 \end{cases}$$
- Sumamos las dos ecuaciones $\rightarrow -5x = -10 \rightarrow x = 2$
- Sustituimos este valor en una de las ecuaciones:
$$3 \cdot 2 + 2y = 2 \rightarrow 2y = -4 \rightarrow y = -2$$
- Solución: $x = 2, y = -2$
- Comprobación:
$$\begin{cases} 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = 2 \\ 2 + 4 \cdot (-2) = -6 \end{cases}$$

¶. Resuelve aplicando el método de reducción.

a) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 1 \end{cases}$ Suma las dos ecuaciones.

b) $\begin{cases} x + 4y = 19 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$ Multiplica por 2 la segunda ecuación.

e) $\begin{cases} 3x - y = -9 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 3y = 12 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ Multiplica por -2 la primera ecuación.

g) $\begin{cases} 4x + 3y = 19 \\ 3x + y = 18 \end{cases}$ Multiplica por -3 la segunda ecuación.

h) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x - 6y = 7 \end{cases}$ Multiplica por -3 la primera ecuación.

2.1 Resolución gráfica de sistemas

Método gráfico

Antes de proponerles los ejercicios de este taller, les mostraré un ejemplo desarrollado paso a paso sobre el método gráfico, para resolver sistemas de ecuaciones 2 x 2:

$$\begin{cases} 3x - y = 7 & \leftarrow \text{Ecuación 1} \\ 2x + y = 8 & \leftarrow \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Procedimiento

1. Despejamos y en ambas ecuaciones.

Ecuación 1

$$3x - y = 7$$

$$-y = 7 - 3x$$

$$y = \frac{7 - 3x}{-1}$$

$$y = -7 + 3x$$

$$y = 3x - 7$$

Ecuación 2

$$2x + y = 8$$

$$y = 8 - 2x$$

$$y = -2x + 8$$

2. Elaboramos la tabla de tabulación de cada ecuación.

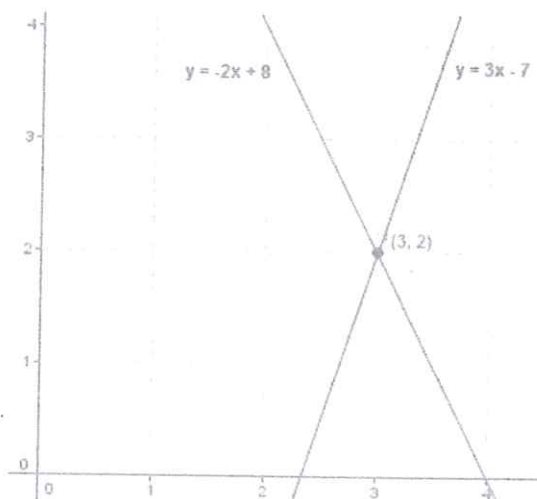
$$y = 3x - 7$$

$$y = -2x + 8$$

x	y
-1	-10
0	-7
2	-1

x	y
-1	10
0	8
2	4

3. Graficamos las dos rectas en el mismo plano cartesiano



Como podemos ver, las dos rectas se cortan en el punto (3,2). Pues bien, esa es la solución del sistema: $x = 3$ y $y = 2$.

2.1 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS EN GENERAL

1. Resuelve por el método que consideres más adecuado. **Representa gráficamente el sistema**

$$a) \begin{cases} 2x - y = -4 \\ 5x + y = -10 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + y = -6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - y = -1 \\ 4x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x - 4y = 3 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x - 3y = -1 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x + y = 10 \\ 5x - 9y = 8 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x = 2y + 7 \\ 3x - 4y = 11 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 4x - 3y = 10 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 3x + 5y = 7 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 6x + 6y = 7 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$$

2.1 Discusión de un sistema de ecuaciones

4

Discutir un sistema de ecuaciones es clasificarlo atendiendo a su número de soluciones.

Según esta clasificación, un sistema de ecuaciones lineales puede ser:

- **Compatible**, cuando tiene alguna solución.
 - Si la solución es única, el sistema es **determinado**.
 - Si hay más de una solución, el sistema es **indeterminado**.
- **Incompatible**, cuando no tiene solución.

PIENSA

Si m y n son números enteros y $m - n = 3$,
¿puede ser $m + n = 0$?
¿Y $m + n = 3$?

EJEMPLO

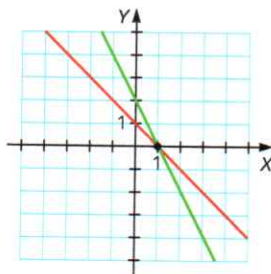
3. Clasifica los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

a) Ambas ecuaciones aportan distinta información.

Se dibujan las rectas que representan cada ecuación, y se obtienen dos rectas que se cortan en un punto, que es la solución del sistema.

El sistema tiene una única solución, es compatible determinado.

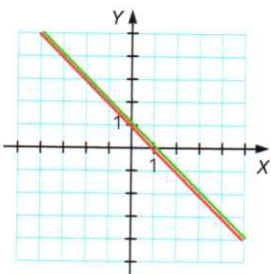


b) Ambas ecuaciones proporcionan la misma información.

La segunda ecuación es igual a la primera ecuación multiplicada por 2.

Se dibujan las rectas que representan cada ecuación, y se obtienen dos rectas coincidentes.

El sistema tiene infinitas soluciones, es compatible indeterminado.

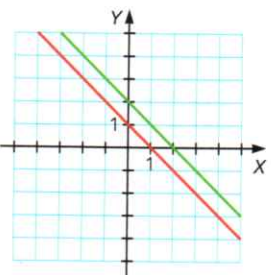


c) Ambas ecuaciones proporcionan una información contradictoria.

Si $x + y$ es igual a 1, según la primera ecuación, no puede ser igual a 2, tal y como se expresa en la segunda ecuación.

Se dibujan las rectas que representan cada ecuación, y se obtienen dos rectas paralelas.

El sistema no tiene solución, es incompatible.



NO OLVIDES

El sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ es:

- **Compatible determinado** si:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

Su representación gráfica son dos rectas que se cortan.

- **Compatible indeterminado** si:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Su representación gráfica son dos rectas coincidentes.

- **Incompatible** si:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Su representación gráfica son dos rectas paralelas.

ACTIVIDADES

7. Clasifica estos sistemas de ecuaciones y resuélvelos por el método más adecuado.

a) $\begin{cases} 8x - 2y = 4 \\ -12x + 3y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 3y + 2x = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$

8. Decide de qué tipo son estos sistemas de ecuaciones y representa gráficamente su solución.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 6y = 2 \\ -6x + 9y = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 10x + y = -3 \\ -4x + 2y = -6 \end{cases}$

2.1 SISTEMAS SIN SOLUCIÓN O CON INFINITAS SOLUCIONES

- Hay sistemas que no tienen solución, y se llaman **incompatibles**. Por ejemplo:

$$a) \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x + 2y = 7 \end{cases}$$

Las ecuaciones, en cada caso, son contradictorias.

- Hay sistemas que tienen infinitas soluciones, y se llaman **indeterminados**. Por ejemplo:

$$a) \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x + 2y = 10 \end{cases}$$

Las dos ecuaciones, en cada caso, dicen lo mismo.

Ejercicio resuelto

Di cuál de estos sistemas es incompatible y cuál es indeterminado:

$$a) \begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 10x - 15y = 40 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 6x - 2y = 8 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

- a) Si dividimos por 5 los dos miembros de la segunda ecuación, obtenemos $2x - 3y = 8$. Por tanto, las dos ecuaciones dicen lo mismo. El sistema es indeterminado.
- b) Si multiplicamos por 2 los dos miembros de la segunda ecuación, llegamos a $6x - 2y = 10$, que contradice la primera ecuación. El sistema es incompatible.

- II. Di cuáles de los siguientes sistemas son incompatibles y cuáles indeterminados y justifica las respuestas. Representa los sistemas gráficamente

$$a) \begin{cases} 5x - 3y = 7 \\ 5x - 3y = 14 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 12x + 6y = 8 \\ 6x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x - y = 5 \\ -x + y = 5 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} -x + 3y = -4 \\ 2x - 6y = 8 \end{cases}$$

2. Completa estos sistemas para que tengan infinitas soluciones:

$$a) \begin{cases} 5x + y = 7 \\ 10x + 2y = \square \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - 3y = 5 \\ \square x - 9y = 15 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 4x + y = \square \\ 20x + 5y = 15 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 14x + \square y = 7 \end{cases}$$

7 PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Problema resuelto

En el comedor de un colegio hay mesas para 6 personas y otras para 4 personas. En total hay 20 mesas, en las que caben 104 alumnos. ¿Cuántas mesas hay de cada clase?

a) Datos del problema:

	MESAS	PERSONAS
DE 6	x	$6x$
DE 4	y	$4y$
TOTAL	20	104

b) Las ecuaciones son:
$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 6x + 4y = 104 \end{cases}$$

c) Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} y = 20 - x \\ 6x + 4(20 - x) = 104 \rightarrow 2x = 24 \rightarrow x = 12 \\ y = 20 - 12 \rightarrow y = 8 \end{cases}$$

d) Damos la solución: Hay 12 mesas de 6 personas y 8 mesas de 4 personas.

1. En un hotel hay habitaciones dobles e individuales. En total tiene 90 habitaciones y 165 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

AYUDA

	HABITACIONES	CAMAS
DOBLES	x	$2x$
INDIVIDUALES	y	y
TOTAL	90	165

2. He pagado una factura de 145 € con billetes de 10 € y de 5 €. En total entregué 17 billetes. ¿Cuántos había de cada clase?

3. Halla dos números cuya suma es 160 y cuya diferencia es 6.

4. Dos números se diferencian en 12 unidades y la mitad del menor es igual a la quinta parte del mayor. ¿Cuáles son esos números?

Problema resuelto

Hace tres años, la edad de Laura era la mitad de la que tenía Ana, y dentro de siete años entre las dos tendrán 50 años. ¿Qué edad tiene cada una?

a) Datos:

EDAD	LAURA	ANA
HOY	x	y
HACE 3 AÑOS	$x - 3$	$y - 3$
DENTRO DE 7 AÑOS	$x + 7$	$y + 7$

b) Ecuaciones:

$$\begin{aligned} \rightarrow x - 3 &= \frac{y - 3}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 36 \end{cases} \\ \rightarrow x + 7 + y + 7 &= 50 \rightarrow \end{aligned}$$

c) Resolvemos el sistema.

$$\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ x + y = 36 \\ \hline 3x = 39 \rightarrow x = 13; y = 36 - 13 = 23 \end{array}$$

d) Solución: Laura tiene 13 años, y Ana, 23 años.

5. Hace dos años, la edad de Carlos era el triple de la de su hijo Luis, y dentro de doce años no tendrá más que el doble. Calcula la edad de cada uno.

6. En un test de 30 preguntas, por cada acierto dan 2 puntos y por cada fallo restan 1 punto. A un chico que contestó todas las preguntas, le dieron 24 puntos. ¿Cuántos aciertos y cuántos fallos tuvo?

7. Un comerciante ha envasado 315 l de aceite en botellas de 1,5 l y de 0,75 l. Si ha utilizado 300 botellas, ¿cuántas ha envasado de cada clase?

8. He pagado 45 € por una camiseta y un pantalón que costaban 52 € entre los dos. En la camiseta me rebajaron el 20%, y en el pantalón, el 10%. ¿Cuál era el precio original de cada artículo?

AYUDA

Un artículo rebajado un 20% cuesta $0,8x$, si su precio original era x .

Problema resuelto

Mezclamos dos tipos de harina, de 0,75 €/kg y de 1,15 €/kg, y obtenemos 50 kg de mezcla cuyo precio es 1 €/kg. ¿Qué cantidad se mezcló de cada clase?

a) Elementos del problema:

HARINA	PESO	PRECIO	COSTE
BARATA	x	0,75	$0,75x$
CARA	y	1,15	$1,15y$
MEZCLA	50	1	$1 \cdot 50$

b) Relaciones entre los elementos:

- La suma de los pesos mezclados es igual al peso de la mezcla: $x + y = 50$.
- La suma de los costes de las cantidades mezcladas es igual al coste de la mezcla: $0,75x + 1,15y = 50$

c) Resolvemos el sistema:
$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 0,75x + 1,15y = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 50 - x \\ 0,75x + 1,15(50 - x) = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 18,75 \\ y = 31,25 \end{cases}$$

d) Solución: Se mezclaron 18,75 kg de harina barata y 31,25 kg de harina cara.

9. En una cooperativa mezclan dos tipos de café, de 5 €/kg y de 7,5 €/kg, para obtener 30 kg de mezcla a un precio de 6 €/kg. ¿Qué cantidad de café de cada clase se mezcló?
10. Se quieren mezclar dos tipos de vino de 5 €/l y 3 €/l para obtener una mezcla de 25 l, cuyo precio sea de 3,8 €/l. ¿Cuántos litros de cada clase hay que mezclar?
11. En una escuela de idiomas había 430 estudiantes durante el curso pasado, entre los matriculados en Francés y en Inglés. Este curso, los de Inglés aumentaron un 18%, y los de Francés, un 15%, de forma que son 502 los matriculados. Averigua cuántos estudiantes de Inglés y cuántos de Francés había durante el curso pasado.
12. He cambiado un montón de monedas de 20 céntimos por monedas de 1 €, y ahora tengo 12 monedas menos que al principio. ¿Cuántas monedas de 20 céntimos tenía?

AYUDA

Número de estudiantes de Inglés durante el curso pasado: x

Número de estudiantes de Inglés durante el curso actual: $1,18x$

AYUDA

	20 CENT.	1 €
MONEDAS	x	y
DINERO	$0,2x$	$1 \cdot y$

Tengo 12 monedas menos, pero el mismo dinero.