

POTENCIAS. REPASO

RECUERDA

• Propiedades de las potencias

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Además, si $a \neq 0$:

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$$

1 Calcula el valor de cada potencia:

$$2^2$$

$$2^{-2}$$

$$(-2)^2$$

$$(-2)^{-2}$$

$$-2^2$$

$$2^3$$

$$2^{-3}$$

$$(-2)^3$$

$$(-2)^{-3}$$

$$-2^3$$

2 Reduce y expresa como potencia de un solo número:

a) $2^2 \cdot 8^2 = 2^4 \cdot (2^3)^2 = 2^4 \cdot 2^6 = 2^{10}$

b) $\frac{16^3}{4^2}$

c) $\frac{3^4}{9^3}$

d) $\frac{2}{(-4)^3}$

e) $\frac{(5^2)^3}{125}$

f) $\frac{12^3}{8^2}$

3 Opera y simplifica las siguientes expresiones:

a) $x^5 \cdot x^2 \cdot x$

b) $(x^7 \cdot x^0 \cdot x^{-2})^3$

c) $x^{16} \cdot x^{21} \cdot x^{-18}$

d) $\frac{x^2 \cdot y^2}{x^3 \cdot y^6}$

e) $\frac{x \cdot y^5}{x^2 y^3}$

f) $\frac{x^{-3} \cdot y^7}{x \cdot y^{-5}}$

4 Reduce las siguientes expresiones:

a) $(2^3 \cdot 3^2)^{-2}$

b) $\frac{2^3 \cdot 4^2}{8^2}$

c) $\frac{(3^5 \cdot 9)^{-3}}{81^{-4}}$

d) $\frac{21 \cdot 2^4}{7^2 \cdot 9 \cdot 8}$

e) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{8}{2^4}\right)^{-2}$

f) $\left(\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{10}\right)^{-4}$

5 Calcula:

a) $10^4 \cdot \frac{1}{5^3}$

c) $(2^{-2})^{-2} \cdot 5^3 \cdot 10^{-4}$

b) $10^{-3} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-5} \cdot 5$

d) $\left(\frac{1}{10}\right)^5 \cdot 5^4 \cdot (2^{-2})^{-3}$

6 Calcula y simplifica:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{9}\right)$

e) $\left(\frac{1}{8}\right)^3 : \left(\frac{2}{5}\right)^4$

b) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2$

d) $\left(\frac{5}{2}\right)^4 : \left(\frac{2^5}{5}\right)^{-2}$

f) $\left(\frac{7}{5}\right)^4 : \left(\frac{49}{125}\right)$

7 Simplifica:

a) $\frac{3^3 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{9^2 \cdot 4^3 \cdot 5}$

c) $\frac{8^{-3} \cdot 4^{-1} \cdot 3^2}{7^{-2} \cdot 4^{-5} \cdot 6}$

b) $\frac{3^4 \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{5^{-1} \cdot 4^3 \cdot 3^2}$

d) $\frac{a^{-3} \cdot b^{-4} \cdot c^7}{a^{-4} \cdot b \cdot c^{-3}}$

8 Reduce:

a) $\frac{(5x^2y^3)^2}{(10x^3y^2)^2}$

c) $\left(\frac{x^{-2}}{y^3}\right) : \frac{1}{x^4y^5}$

b) $\left[\frac{12x^5y^{-1}}{18x^3y}\right]^{-1}$

d) $\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^3 : \left(\frac{x}{y}\right)^{-2}}{\left(\frac{x}{y}\right)^5}$

7

LOGARITMOS

7.1 SIGNIFICADO DE LOS LOGARITMOS

1 Calcula razonadamente el valor de los siguientes logaritmos:

$$\log_5 25 = 2 \text{ porque } 5^2 = 25$$

$$\log_5 125$$

$$\log_5 5$$

$$\log_5 625$$

$$\log_5 \frac{1}{5}$$

$$\log_5 0,2$$

$$\log_5 1 = 0 \text{ porque } 5^0 = 1$$

$$\log_7 0$$

$$\log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 5^{2/3}$$

$$\log_7 \sqrt[3]{49}$$

$$\log_2 64$$

$$\log_2 1/2$$

$$\log_2 32$$

$$\log_2 0,5$$

$$\log_2 1/32 = \log_2 2^{-5}$$

$$\log_3 9$$

$$\log_3 1/9$$

$$\log_3 243$$

$$\log_4 2 = \log_4 \sqrt{4}$$

$$\log_4 8$$

$$\log_{10} 1000$$

$$\log_{10} 0,0001$$

$$\log_{10} \sqrt[5]{100}$$

$$\log_{10} \sqrt[5]{0,01}$$

$$\log_{10} 1$$

$$\log_{187} 1$$

$$\log_2 1024$$

$$\log_a a^7$$

$$\log_a \sqrt[5]{a^2}$$

$$\log_a a^{-3/2}$$

$$\log_a 1/\sqrt{a^3}$$

$$\log_a 1$$

RECUERDA

$$\log_a k = x \text{ si } a^x = k$$

$$\text{Por tanto: } \begin{cases} \log_a a^n = n \\ \log_a 1 = 0 \end{cases} ; \log_a (1/a^n) = \log_a a^{-n} = -n$$

$$\log_a \sqrt{a} = \log_a a^{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$\log_a \sqrt[n]{a^m} = \log_a a^{m/n} = \frac{m}{n}$$

2 Completa las siguientes expresiones y justifica la correspondiente igualdad:

a) $\log_3 81 = 4$ porque $81 = 3^4$ y $\log_3 3^4 = 4$

b) $\log_3 (3^2)^5 = 10$ porque $(3^2)^5 = 3^{10}$ y $\log_3 3^{10} = 10$

c) $\log_{\dots} 64 = 6$

d) $\log_{11} \dots = 1$

e) $\log_{17} \dots = 0$

f) $\log_3 9^{\dots} = 50$

g) $\log_5 (\dots)^4 = 12$

h) $\log_{17} (17^{\dots})^3 = 21$

i) $\log_{\dots} (144)^7 = 14$

j) $\log_{\dots} 256^2 = 8$

k) $\log_2 \dots^{1/2} = 3$

3 Resuelve:

a) $\log_{1/2} \frac{1}{2}$

c) $\log_{1/2} \frac{1}{4}$

e) $\log_{1/2} 8$

g) $\log_{1/3} \frac{1}{81}$

i) $\log_{1/5} 5$

k) $\log_{0,25} 64$

m) $\log_{1/4} 2$

b) $\log_{1/2} 2$

d) $\log_{1/2} 32$

f) $\log_{1/5} 125$

h) $\log_{1/3} 81$

j) $\log_{0,2} 25$

l) $\log_{1/8} 1/2$

n) $\log_{1/9} 3$

7.2 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

RECUERDA

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^m = m \log_a x$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = (\log_a x)/n$$

$$\left. \begin{array}{l} \log_a x^m = m \log_a x \\ \log_a \sqrt[n]{x} = (\log_a x)/n \end{array} \right\} \log_a \sqrt[n]{x^m} = (\log_a x) \cdot m/n$$

ERRORES COMUNES

$$\begin{array}{l} \log(x+y) \neq \log x + \log y \\ \log(x-y) \neq \log x - \log y \end{array}$$

EJERCICIO RESUELTO

$$\log_a x = \log_a 327 - 2 \log_a 5. \text{ ¿Cuánto vale } x?$$

$$\log_a 327 - 2 \log_a 5 = \log_a 327 - \log_a 5^2 = \log_a \frac{327}{5^2}. \text{ Por tanto, } x = \frac{327}{25}$$

1 Halla el valor de x en las siguientes expresiones:

a) $\log_a x = \log_a 31 + \log_a 4$

b) $\log_a x = \log_a 32 + \log_a 8$

c) $\log_a x = \frac{1}{2} \log_a 36 - 2 \log_a 2$

d) $\log_a x = \log_a 24 + 3 \log_a 5 - \frac{1}{3} \log_a 1000$

e) $\log_a x = 2 \log_a m + 5 \log_a n$
 $2 \log_a m + 5 \log_a n = \log_a m^2 + \log_a n^5 = \log_a (m^2 \cdot n^5). \text{ Por tanto, } x = m^2 \cdot n^5$

f) $\log_a x = 3 \log_a m - 5 \log_a n$

g) $\log_a x = \frac{1}{4} [\log_a m - (\log_a n)/3]$

h) $\log_a x = 2 \log_a (m \cdot n) - \frac{2}{3} \log_a m^2 - \frac{1}{3} \log_a n^5$

i) $\log_a x = \frac{3}{5} \log_a m - \frac{1}{5} \log_a m^2 - \frac{2}{5} \log_a (m \cdot n)$

j) $\log_a x = \frac{1}{2} \left(\log_a m + \frac{2}{3} \log_a n \right) - \frac{1}{4} \left(\log_a m - \frac{4}{15} \log_a n \right)$

7.4 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

EJERCICIO RESUELTO **ECUAC. TIPO I**

→ siempre poner como potencia de 2

Resolver la ecuación $2^{5x+3} = 1024$.

Como $1024 = 2^{10}$, entonces $2^{5x+3} = 2^{10} \rightarrow 5x+3 = 10 \rightarrow x = 7/5$

1 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $2^{3x-1} = 1/64$

b) $5^{x^2-3x+1} = 1/5$

c) $3^{x^2-5x+4} = 1$

d) $10^{x^2-3x-6} = 0,01$

EJERCICIO RESUELTO **EC. TIPO II**

→ No se puede poner como potencia de 2

Resolver la ecuación $2^{5x+3} = 1000$.

Como 1000 no es potencia de 2, se toman logaritmos (log) en ambos miembros:

$$(5x+3) \log 2 = \log 1000 \rightarrow 5x+3 = \frac{\log 1000}{\log 2} \rightarrow x = \left(\frac{\log 1000}{\log 2} - 3 \right) : 5 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = 1,39$$

Comprobación: Se introduce la solución en la memoria sin redondear, $\boxed{\text{Min}}$. Después, para comprobarla, se procede así: $2 \boxed{\div} 5 \boxed{\times} \boxed{\text{MR}} \boxed{+} 3 \boxed{)} \boxed{=}$ 1000.

2 Resuelve estas ecuaciones:

a) $10^{3x+5} = 3584$

b) $4^{7x-1} = 8000$

c) $10^{3x+5} = 7^{5x-1}$

d) $5^{x^2-3x} = 800$

e) $2^{x^2+3} = 200$

f) $3^{x^2+x+1} = 1000$

EJERCICIO RESUELTO *ECUAC. TIPO III cambio de variable*

Resolver la ecuación $4^x - 3 \cdot 2^{x-1} - 1 = 0$.

Prepararemos la ecuación para aplicar un cambio de variable en el que $2^x = y$:

$$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 \quad ; \quad 2^{x-1} = \frac{2^x}{2}$$

$$(2^x)^2 - 3 \cdot \frac{2^x}{2} - 1 = 0 \rightarrow y^2 - \frac{3y}{2} - 1 = 0 \rightarrow 2y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$y = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{cases} \quad \text{Deshacemos el cambio} \quad \begin{cases} 2^x = -\frac{1}{2} \text{ Imposible } (2^x > 0) \\ 2^x = 2 \rightarrow \boxed{x = 1} \end{cases}$$

3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2^{x+1} + 2^x = 3$

b) $3^{x+1} - 7 \cdot 3^{x-2} = 60$

c) $5^{x+3} + 5^{x+2} = 6$

d) $5 \cdot 2^{1-x} + 2^{3-x} = \frac{9}{2}$

e) $4 \cdot 3^{x+3} - 36 \cdot 3^{x-1} = 32$

f) $2^x + \frac{2}{2^x} = 3$

g) $3^x + 3^{1-x} = 4$

h) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

i) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$

j) $3^{2x} - 3^x - 6 = 0$

EJERCICIO RESUELTO **ECUACIONES LOGARITMICAS**

Resolver la ecuación $\log (2x - 1) + \log (x + 2) = \log 3 + 2 \log x$.

Aplicamos las propiedades del logaritmo de un producto y de una potencia:

$$\log (x \cdot y) = \log x + \log y ; \log x^m = m \log x$$

$$\log [(2x - 1)(x + 2)] = \log 3x^2 \rightarrow (2x - 1)(x + 2) = 3x^2$$

$$2x^2 + 4x - x - 2 = 3x^2 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$$\begin{aligned} x_1 = 2 &\rightarrow \log 3 + \log 4 = \log 3 + 2 \log 2 \\ x_2 = 1 &\rightarrow \log 1 + \log 3 = \log 3 + 2 \log 1 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{aligned}} \right\} \text{Las dos soluciones son válidas.}$$

4 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log (x - 3) + \log (x + 1) = \log 3 + \log (x - 1)$

b) $2 \log (x - 3) = \log x - \log 4$

c) $2 \log (4 - x) = \log (3x + 8) + \log (x + 2)$

d) $2 \log (x + 3) + \log 2 = \log (3x^2 + 5)$

e) $\log (3x + 7) = 2 \log (x + 1) - \log (2x - 5)$

f) $\log (x + 4) - \log x = \log 3x - \log 2$

g) $\log (x + 2) - \log (x - 2) = \log (2x - 1)$

h) $\log (x + 2) = 2 \log (2x + 1) - \log (5 - 2x)$

i) $\log (x + 3) + \log (x - 3) - \log 7 = \log (x + 1) - \log 5$

j) $\frac{1}{2} \log x = \log (x - 2)$