

1 MONOMIOS

Definiciones

- **Monomio** es el producto de un número (coeficiente) por una o varias letras (parte literal).
- **Grado** de un monomio es el número de factores que tiene la parte literal.
- Dos **monomios** son **semejantes** cuando tienen la misma parte literal.
- Los monomios solo se pueden **sumar** si son semejantes. Si no lo son, la suma se deja indicada.

EJEMPLO

- $-2x^2y$ es un monomio de grado 3.
Coeficiente, -2 .
Parte literal, x^2y .
- $3x^2y$ es un monomio semejante a $-2x^2y$.
- x^2 y $2x$ no se pueden sumar porque no son semejantes. Su suma se deja indicada: $x^2 + 2x$.

1. Efectúa las siguientes sumas de monomios.

a) $5x^2 - x^2 = 4x^2$

b) $7x + 3x$

c) $3x - 2x$

d) $8x - 2x - 10x$

e) $6y - 3y + y$

f) $4a - 3a + 2a$

g) $6y - 8y + 2y$

h) $-x^2 + 5x^2 - 3x^2$

i) $4x^2 - 3x^2 + 2x^2$

j) $5y^2 - 7y^2 + y^2$

k) $2x + \frac{1}{2}x$

l) $\frac{2}{3}x^2 + x^2$

2. Suma los monomios semejantes para simplificar las expresiones siguientes:

a) $4x^2 - 5x - x^2 + x = 3x^2 - 4x$

b) $3x - 1 - 2x + 5x$

c) $x - 2 + 3x + 5$

d) $x^2 - x + 7x^2 + 3x$

e) $7x + x^2 - 8x + 3x^2$

f) $-2x^2 + 3x - x^2 + x$

g) $6x + 2y + 3y - x$

h) $3x + y - 2x - y$

i) $1 - 8x^2 - x + 7x^2 + 2x + 3$

j) $3 - y^2 - 7y + 5y^2 - 4 + y$

k) $3x - \frac{1}{2} + x + 2$

l) $2x - y + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$

Producto de monomios

Para **multiplicar monomios**, se multiplican los coeficientes y las partes literales siguiendo las reglas de las potencias. El resultado es siempre un monomio.

EJEMPLO

$$-4x^2 \cdot 8x^3 = -4 \cdot 8 \cdot x^2 \cdot x^3 = -32x^5$$

Ejercicios resueltos

$$3(-2x^2) = -6x^2; \quad (5x)(x^2) = 5x^3; \quad (2xy)(-4x) = -8x^2y$$

3. Multiplica los siguientes monomios:

a) $2 \cdot 5x$

b) $4x \cdot (-3)$

c) $(-2) \cdot 5x^2$

d) $6x \cdot 2x$

e) $x \cdot 5x$

f) $-2x \cdot 7x$

g) $-x \cdot (-4x)$

h) $3y \cdot (-5y)$

i) $4(-3y^2)$

j) $2x \left(\frac{1}{3}x \right)$

k) $\frac{1}{2}x(-3x)$

l) $2x \cdot x^2$

m) $(3x)(4x)(-x)$

n) $7x^2(-3x)$

ñ) $\frac{2}{3}x^2 \cdot 3x$

o) $2xy \cdot 3x$

p) $5x^2y \cdot 2y$

q) $3xy(-4x)$

4. Multiplica y reduce las siguientes expresiones:

a) $3 \cdot (5x) - 2 \cdot (8x) + 3x$

b) $2x \cdot (-3x) + 5 \cdot (2x^2) - x \cdot x$

c) $-8x \cdot x + 3 \cdot (2x^2) + 2x^2$

d) $3y \cdot 4y - 7y^2 + 2 \cdot (-5y^2)$

e) $3x \cdot 2y + 5xy + 4x \cdot (-3y)$

f) $x \cdot (-7x) + 3 \cdot 4x - 2 \cdot 5x + x^2$

g) $x \left(-\frac{5}{2}x \right) + 3 \left(\frac{x^2}{2} \right) - 2x \cdot (-2x)$

2 POLINOMIOS

Definiciones

- Un **polinomio** es la suma de dos o más monomios.
Cada uno de los monomios que lo forman se llama **término**.
- **Grado** de un polinomio es el del término de mayor grado.
- Para **sumar** dos polinomios, se suman los términos semejantes.
- Para **restar** dos polinomios, se suma al minuendo el opuesto al sustraendo.

Ejercicio resuelto

Dados los polinomios $P = 4x^2 - 2x + 3$ y $Q = -2x^3 + 3x - 5$, halla $P + Q$ y $P - Q$.

$$\begin{array}{r} P \rightarrow 4x^2 - 2x + 3 \\ + Q \rightarrow -2x^3 + 3x - 5 \\ \hline P + Q = -2x^3 + 4x^2 + x - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} P \rightarrow 4x^2 - 2x + 3 \\ - Q \rightarrow 2x^3 - 3x + 5 \\ \hline P - Q = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 8 \end{array}$$

EJEMPLO

$x^3 + 2x^2 - x + 7$ es un polinomio con 4 términos. Su grado es 3, que es el grado de x^3 .

TEN EN CUENTA

El **opuesto** de un polinomio se obtiene cambiando el signo de todos sus términos.

1. Efectúa las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{r} a) \quad A \rightarrow 3x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \\ + B \rightarrow x^3 - x^2 + 2x - 3 \\ \hline A + B \rightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) \quad A \rightarrow x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x \\ + B \rightarrow 2x^4 + 3x^2 - x \\ \hline A + B \rightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{r} c) \quad A \rightarrow 2x^3 - 3x^2 + 5 \\ - B \rightarrow x^3 - 2x^2 - x - 7 \\ \hline A - B \rightarrow \end{array}$$

2. Dados $P = 4x^2 - 7x + 3$; $Q = x^3 - 5x^2 + 3x$ y $R = -2x^3 + 4x^2 - 2$, halla:

a) $P + Q$

b) $P + R$

c) $Q - R$

d) $P - Q$

3. Quita paréntesis y reduce.

a) $(3x^3 - 7x^2 + 3) + (x^3 + 2x^2)$

b) $(x^2 - 7x) + (x^3 - x^2 + 3x)$

c) $(5x^2 - 3x + 1) - (x^2 + 2x)$

d) $2x^3 - 3x^2 - (-x^3 + 2x^2 - 7)$

e) $(-2x + 5) - (x^2 - 3x + 2)$

f) $\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x - 1\right) + \left(x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right)$

RECUERDA

Si un paréntesis tiene delante el signo menos, hay que cambiar todos los signos que hay dentro del paréntesis.

Producto de polinomios

- Para **multiplicar** un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.
- Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de los factores por cada uno de los monomios del otro factor y después se suman los monomios semejantes.

Ejercicio resuelto

Dados los polinomios $A = 3x^2 - 5x + 2$ y $B = 2x - 1$, halla $A \cdot B$.

$$\begin{array}{r}
 A \rightarrow 3x^2 - 5x + 2 \\
 B \rightarrow 2x - 1 \\
 \hline
 -3x^2 + 5x - 2 \leftarrow \text{Producto de } -1 \text{ por } A \\
 6x^3 - 10x^2 + 4x \leftarrow \text{Producto de } 2x \text{ por } A \\
 \hline
 A \cdot B = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2
 \end{array}$$

También se puede hacer el producto directamente, así:

$$\begin{aligned}
 A \cdot B &= (3x^2 - 5x + 2)(2x - 1) = \\
 &= 6x^3 - 3x^2 - 10x^2 + 5x + 4x - 2 = \\
 &= 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2
 \end{aligned}$$

4. Efectúa los siguientes productos:

a) $2x(3x + 5)$

b) $-3x(x - 2)$

c) $-5x(2x - 1)$

d) $x(-4x + 3)$

e) $4x^2(2x + 3)$

f) $-2x(4x^2 + x - 1)$

g) $7x(2x^2 - x + 3)$

h) $3x(x^2 - 7x + 5)$

i) $4x(-x^2 + 2x - 3)$

j) $5x^2(2x^2 - 3x + 1)$

5. Completa las siguientes multiplicaciones:

$$\begin{array}{r}
 -2x + 5 \\
 x - 2 \\
 \hline
 4x - \square \\
 -2x^2 + \square \\
 \hline
 -2x^2 + \square - 10
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4x - 3 \\
 -2x + 1 \\
 \hline
 \square - 3 \\
 -\square + 6x \\
 \hline
 -\square + 10x - 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x + 5 \\
 x - 1 \\
 \hline
 -x^2 + \square - 5 \\
 x^3 - \square + 5x \\
 \hline
 x^3 - \square + 7x - 5
 \end{array}$$

6. Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a)
$$\begin{array}{r}
 3x - 2 \\
 x + 3 \\
 \hline
 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r}
 -5x + 1 \\
 2x - 3 \\
 \hline
 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 7x + 1 \\
 3x + 2 \\
 \hline
 \end{array}$$

d) $(4x + 1)(3x - 2)$

e) $(2x + 4)(-x - 3)$

f) $(x^2 - 3)(2x + 1)$

4 IDENTIDADES NOTABLES

Llamamos **identidades notables** a las igualdades siguientes:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab; \quad (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab; \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos resueltos

$$(x + 5)^2 = x^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 = x^2 + 25 + 10x$$

$$(2x + 1)(2x - 1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$$

1. Completa las siguientes igualdades:

a) $(x + 3)^2 = x^2 + \square + 6x$

b) $(x - 3)^2 = \square + 9 - 6x$

c) $(x + 4)^2 = x^2 + 16 + \square$

d) $(x - 4)^2 = x^2 + \square - 8x$

e) $(2x - 3)^2 = 4x^2 + \square - 12x$

f) $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 9 + \square$

g) $(x + 3)(x - 3) = x^2 - \square$

h) $(x + 6)(x - 6) = \square - 36$

2. Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(x + 10)^2 = x^2 + 10^2 + 2 \cdot x \cdot 10 = x^2 + 100 + 20x$

b) $(x + 6)^2$

c) $(x - 1)^2$

d) $(x - 5)^2$

e) $(x - 6)^2$

f) $(x + 2)^2$

g) $(2x + 1)^2$

h) $(3x - 1)^2$

i) $(1 - 4x)^2$

j) $(2x - 3)^2$

k) $(3 + 2x)^2$

l) $(1 + 5x)^2$

m) $(x + 1)(x - 1)$

n) $(x + 2)(x - 2)$

ñ) $(x + 3)(x - 3)$

o) $(4 + x)(4 - x)$

p) $(2x + 3)(2x - 3)$

q) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

1.2 DIVISIÓN DE POLINOMIOS

EJERCICIO RESUELTO

Hallar el cociente y el resto de la división $(4x^4 - 2x^3 + 10x^2 + 3x) : (x^2 + x + 1)$.

$$\begin{array}{r}
 4x^4 - 2x^3 + 10x^2 + 3x \quad | \quad x^2 + x + 1 \\
 \underline{-4x^4 - 4x^3 - 4x^2} \\
 -6x^3 + 6x^2 + 3x \\
 \underline{6x^3 + 6x^2 + 6x} \\
 12x^2 + 9x \\
 \underline{-12x^2 - 12x - 12} \\
 -3x - 12 \leftarrow \text{Resto}
 \end{array}$$

1º Dividiendo $\frac{4x^4}{x^2} = 4x^2$, obtenemos el primer término del cociente.

2º Multiplicamos el divisor por $4x^2$, y el resultado se lo restamos al dividendo.

3º El primer resto es $-6x^3 + 6x^2 + 3x$.

A partir de aquí, repetimos el proceso.

1 Completa estas divisiones:

$$\begin{array}{r}
 \text{a) } 6x^3 - 4x^2 + 3x - 5 \quad | \quad x^2 - 3x + 1 \\
 \underline{-6x^3 + \square x^2 - 6x} \\
 14x^2 - 3x - 5 \\
 \underline{-\square x^2 + \square x - \square} \\
 \square x - \square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{b) } 2x^2 + 5x - 1 \quad | \quad 4x + 1 \\
 \underline{-2x^2 - \frac{1}{2}x} \\
 \square x - 1 \\
 \underline{-\square x - \square} \\
 -\square
 \end{array}$$

2 Halla el cociente y el resto de cada una de las siguientes divisiones:

a) $(4x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x) : (x^2 - 3x + 1)$

Cociente =

Resto =

b) $(-2x^4 + 3x^3 + x - 2) : (x^2 + x)$

Cociente =

Resto =

c) $(2x^3 - 3x^2 + 5x + 1) : (x^2 + 1)$

Cociente =

Resto =

d) $(5x^4 - 6x^2 + 2x - 3) : (x^2 - 2)$

Cociente =

Resto =

1.3 REGLA DE RUFFINI

EJERCICIO RESUELTO

Hallar el cociente y el resto de la división $(3x^3 - 5x^2 + 4) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & -5 & 0 & 4 \\ & & -3 & 8 & -8 \\ \hline & 3 & -8 & 8 & -4 \end{array}$$

RESTO

C: $3x^2 - 8x + 8$

R: -4

- En este caso es $a = -1$.
- El primer coeficiente del cociente coincide con el primero del dividendo, 3.
- Multiplicamos 3 por $a = -1$ y sumamos el resultado a -5 .
- Repetimos el proceso hasta obtener el resto.
- El cociente es de un grado menos que el dividendo. El resto es un número.

1 Aplica la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones (en todas ellas a es positivo):

a) $(2x^3 - 3x^2 - 11x + 2) : (x - 3)$

b) $(x^4 - 5x^2 + x - 2) : (x - 2)$

c) $(3x^5 - 15x^4 - x^2 - x + 30) : (x - 5)$

d) $(2x^2 - 3x + 1) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$

2 Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones (en todas ellas a es un número negativo):

a) $(-x^3 + 3x^2 + 17x + 7) : (x + 2)$

b) $(x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 18x + 35) : (x + 5)$

c) $(3x^3 + 13x^2 + 5x) : (x + 4)$

d) $(3x^3 - 14x^2 - 2x + 1) : \left(x + \frac{1}{3}\right)$

3 Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(x^4 - x + 3x^3 - 3) : (x + 3)$

b) $(x^2 - 3x^3 + x^4 - 2x - 3) : (x - 3)$

c) $(x^4 - 2x^3 + 15x - 4) : (x - 2)$

d) $(2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 4x - 2) : \left(x + \frac{3}{2}\right)$

e) $(x^3 - 2) : (x + 1)$

f) $(x^5 - 10x) : (x + 2)$

Factorizar polinomios. Resolver ecuaciones de grado mayor que dos

EJERCICIO RESUELTO

Resolver la ecuación

$$x^5 - 16x = 0$$

Descomponer en factores el polinomio $x^5 - 16x$.

- Sacamos el factor común x (x está en todos los términos):

$$x^5 - 16x = x(x^4 - 16). \text{ El } 0 \text{ es una raíz, ya que } P(0) = 0.$$

- Buscamos otras raíces enteras entre los divisores de 16:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & -15 \end{array}$$

1 no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ & & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ -2 & & -2 & 0 & -8 & \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 & \end{array}$$

El 2 es una raíz; el polinomio es divisible por $x - 2$.

El -2 es otra raíz.

- Es imposible encontrar más raíces, porque el polinomio $x^2 + 4$ no se anula para ningún valor de x .

- Por tanto, $x^5 - 16x = x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

Otra forma de hacerlo: Después de sacar factor común, observamos que $(x^4 - 16)$ es una diferencia de cuadrados:

$$x(x^4 - 16) = x(x^2 + 4)(x^2 - 4). \text{ El factor } (x^2 - 4) \text{ es también diferencia de cuadrados:}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x^5 - 16x = x(x^2 + 4) \frac{(x + 2)(x - 2)}{x^2 - 4}$$

Soluciones :

$$x = 0$$

$$x = 2$$

$$x = -2$$

4 Observa y descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^3 + 4x^2 + x - 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \\ -2 & & -2 & -6 & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & \end{array}$$

b) $3x^4 + 12x^3 - 21x^2 - 66x + 72$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 3 & 12 & -21 & -66 & 72 \\ & & 3 & 15 & -6 & -72 \\ \hline & 3 & 15 & -6 & -72 & 0 \\ 2 & & 6 & 42 & 72 & \\ \hline & 3 & 21 & 36 & 0 & \\ -3 & & -9 & -36 & & \\ \hline & 3 & 12 & 0 & \end{array}$$

c) $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ & & 2 & -3 & 1 \\ \hline & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & & 2 & -1 & \\ \hline & 2 & -1 & 0 & \end{array}$$

d) $2x^4 - 9x^3 - 5x^2 = x^2(2x^2 - 9x - 5)$

$$\begin{array}{r|rrr} 5 & 2 & -9 & -5 \\ & & 10 & 5 \\ \hline & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

5 Dado el polinomio $P(x) = x(x + 3)(2x - 3)$, prueba que $P(0)$, $P(-3)$ y $P\left(\frac{3}{2}\right)$ son 0. ¿Cuáles son las raíces de $P(x)$?

6 Descompón en factores los siguientes polinomios:

- a) $x^2 - 6x + 5$ b) $2x^3 - 2x$
c) $x^3 + 12x^2 + 35x$ d) $3x^2 + 5x - 2$
e) $3x^4 - 15x^2 + 12$ f) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$
g) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ h) $3x^3 + 2x^2 - 27x - 18$
i) $2x^3 + 7x^2 - 4x$ j) $-x^3 + 13x - 12$

EJERCICIO RESUELTO

Descomponer en factores el polinomio $6x^2 - x - 1$.

Este polinomio no tiene raíces enteras. Buscamos sus raíces fraccionarias resolviendo la ecuación $6x^2 - x - 1 = 0$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12} < \frac{1/2}{-1/3}$$

	6	-1	-1
1/2		3	1
	6	2	0
-1/3		-2	
	6		0

Dividimos el polinomio por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ y $\left(x + \frac{1}{3}\right)$:

$$\text{Por tanto: } 6x^2 - x - 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{o bien: } 6x^2 - x - 1 = (2x - 1)(3x + 1)$$

7 Descompón en factores los siguientes polinomios (no tienen raíces enteras):

- a) $4x^2 - 4x - 15$ b) $8x^2 + 2x - 1$
c) $10x^2 + 3x - 1$ d) $9x^2 - 9x + 2$

8 Escribe, en cada caso, un polinomio que tenga por raíces los números dados:

- a) 2 y -3 b) 0, 1 y 2
c) 4, 5 y -5 d) -1 y $\frac{3}{4}$