

1.5.1 RADICALES

8 Radicales

$$\begin{array}{c} \text{Índice} \\ \downarrow \\ \sqrt[n]{a} = b \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{Radicando} \quad \text{Raíz} \end{array}$$

Dado un número real a , se llama **raíz enésima** de a , o **radical de índice n** de a , a todo número real b que verifique que $b^n = a$. Se denota por $\sqrt[n]{a} = b$.

La radicación es una operación relacionada con la potenciación.

Potenciación	Radicación
Conocemos la base, b , y el exponente, n , y calculamos la potencia. $b^n = a$	Conocemos la potencia, a , y el exponente, n , y calculamos la base. $\sqrt[n]{a} = b$

8.1. Valor numérico de un radical

Se llama **valor numérico** del radical $\sqrt[n]{a}$ a todo número real b tal que $b^n = a$.

Cuando calculamos el valor numérico de un radical hay que tener en cuenta si el índice es par o impar y, también, el signo del radicando.

	Radicando	Índice	N.º de raíces reales
$\sqrt[n]{a}$	$a > 0$	n impar	1 raíz positiva
		n par	2 raíces: una positiva y su opuesta
	$a = 0$	n par o impar	1 raíz: $\sqrt[n]{0} = 0$
	$a < 0$	n impar	1 raíz negativa
		n par	Ninguna raíz

Calculadora



La calculadora científica nos permite calcular raíces con las teclas $x^{1/y}$ y **SHIFT**.

$$\sqrt[3]{-4} \rightarrow 4 \text{ (+/-) (SHIFT) } (x^{1/y}) 3 = -1.587401052$$

$$\sqrt[4]{20} \rightarrow 20 \text{ (SHIFT) } (x^{1/y}) 4 = 2.114742527$$

Date cuenta de que, cuando existen dos raíces, la calculadora solo da la raíz positiva.

Ejemplo

11. Dadas las siguientes igualdades, deduce el número de raíces.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 4^2 = 16 \rightarrow \sqrt{16} = 4 \\ (-4)^2 = 16 \rightarrow \sqrt{16} = -4 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Decimos que 16 tiene dos raíces cuadradas.}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 4^3 = 64 \rightarrow \sqrt[3]{64} = 4 \\ (-4)^3 = -64 \rightarrow \sqrt[3]{-64} = -4 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 64 \text{ tiene una raíz cúbica, 4.} \\ -4 \text{ es la única raíz cúbica de } -64. \end{array} \right.$$

ACTIVIDADES

28. Decide si son ciertas estas igualdades. Razona la respuesta.

a) $\sqrt[3]{-16} = -2$

c) $\sqrt[3]{1.000.000} = \pm 1.000$

a) $\sqrt[4]{16}$

c) $\sqrt[4]{-10.000}$

b) $\sqrt[8]{256} = \pm 4$

d) $\sqrt[5]{32} = \pm 2$

b) $\sqrt[3]{-8}$

d) $\sqrt[5]{243}$

1.5.2 POTENCIAS DE EXPONENTE FRACCIONARIO

8.2. Potencias de exponente fraccionario

Una potencia de exponente fraccionario $a^{\frac{m}{n}}$ es un radical de índice n y radicando a^m , y se denota: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Ejemplo

12 Expresa en forma de potencia con exponente fraccionario.

a) $\sqrt[3]{7^4} = 7^{\frac{4}{3}}$ b) $\sqrt[5]{-16} = (-16)^{\frac{1}{5}}$ c) $\sqrt{12^4} = 12^{\frac{4}{2}}$

Dos radicales son equivalentes cuando, al expresarlos en forma de potencia con exponente fraccionario, sus bases son iguales y las fracciones de sus exponentes son equivalentes.

$$a^{\frac{m}{n}} \text{ es equivalente a } a^{\frac{p}{q}} \text{ si } \frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

Ejemplo

13 Expresa como potencia los siguientes radicales y halla radicales equivalentes.

a) $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$ $3^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{2}{10}} \rightarrow \sqrt[10]{3^2} = \sqrt[10]{9}$
 b) $\sqrt[3]{(-5)^2} = (-5)^{\frac{2}{3}}$ $(-5)^{\frac{2}{3}} = (-5)^{\frac{4}{6}} \rightarrow \sqrt[6]{(-5)^4} = \sqrt[6]{(-5)^4}$

1.5.3 SIMPLIFICAR RADICALES

8.3. Simplificación de radicales

Simplificar radicales consiste en extraer de la raíz todos los factores posibles.

Hazlo así

CÓMO SIMPLIFICAMOS RADICALES

Simplifica, todo lo posible, los radicales $\sqrt[4]{64}$ y $\sqrt[8]{9}$.

PRIMERO. Expresamos la raíz como potencia de exponente fraccionario.

$$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{6}{4}} \quad \sqrt[8]{3^2} = 3^{\frac{2}{8}}$$

SEGUNDO. Calculamos la fracción irreducible del exponente. Si es una fracción impropia, la transformamos en la suma de un número entero y una fracción propia.

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \quad \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

TERCERO. Lo expresamos como producto de potencias, si se puede, y volvemos a transformarlo en radical.

$$2^{\left(1+\frac{1}{2}\right)} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \quad 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$$

Date cuenta

Al calcular radicales equivalentes, el número de raíces puede variar.

$\sqrt[3]{-1}$ y $\sqrt[6]{(-1)^2}$ son equivalentes, pero no tienen las mismas raíces.

$$\sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\sqrt[6]{(-1)^2} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Recuerda

Fracciones impropias

Una fracción es impropia cuando su denominador es mayor que su numerador.

$$\frac{16}{3} \rightarrow \text{Fracción impropia}$$

Cualquier fracción impropia se puede expresar como la suma de un número entero y una fracción.

$$\frac{16}{3} \begin{array}{l} \overline{) 3} \\ 5 \end{array} \rightarrow \frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3}$$

ACTIVIDADES

30 Transforma los radicales en potencias, y viceversa.

a) $3^{\frac{1}{4}}$ c) $2^{\frac{1}{6}}$ e) $10^{\frac{2}{7}}$
 b) $5^{\frac{2}{3}}$ d) $7^{\frac{3}{5}}$ f) $\sqrt[4]{5^7}$

31 Indica si son equivalentes los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{3^6}$ y $\sqrt{3^3}$ c) $\sqrt[4]{36}$ y $\sqrt{6}$
 b) $\sqrt[5]{2^{10}}$ y $\sqrt{2}$ d) $\sqrt[4]{5^{10}}$ y $\sqrt{5^4}$

9 Operaciones con radicales

9.1. Reducir radicales a índice común

Reducir radicales a índice común consiste en encontrar otros radicales equivalentes que tengan el mismo índice.

Hazlo así

CÓMO REDUCIMOS RADICALES A ÍNDICE COMÚN

Reduce a índice común $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ y $\sqrt[5]{5}$.

PRIMERO. Expresamos los radicales como potencias de exponente fraccionario.

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt[5]{5} = 5^{\frac{1}{5}}$$

SEGUNDO. Reducimos a común denominador los exponentes y los expresamos de nuevo como radical.

$$\begin{aligned} \text{m.c.m.}(2, 3, 5) &= 30 \\ 2^{\frac{1}{2}} &= 2^{\frac{15}{30}} = \sqrt[30]{2^{15}} \qquad 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{10}{30}} = \sqrt[30]{3^{10}} \qquad 5^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{6}{30}} = \sqrt[30]{5^6} \end{aligned}$$

No olvides

- $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{1}{\frac{n}{p}}} = \sqrt[\frac{n}{p}]{a}$
- $b\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{a} = (b+c)\sqrt[n]{a}$
- $b\sqrt[n]{a} - c\sqrt[n]{a} = (b-c)\sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

9.2. Operaciones con radicales

- Para sumar o restar radicales, estos deben tener el mismo índice e idéntico radicando.
- Para multiplicar o dividir radicales, deben tener el mismo índice o igual radicando. Si los radicales no tienen el mismo índice, se reducen a índice común.
- Para calcular la potencia o la raíz de un radical, transformamos los radicales en potencias y operamos con ellas.

Ejemplo

14 Realiza estas operaciones.

a) $3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5^2} = 3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5}$

Simplificamos el radical

b) $(\sqrt{2} : \sqrt[3]{2}) \cdot \sqrt[5]{5^2} = \left(2^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{3}}\right) \cdot 5^{\frac{2}{5}} = 2^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} \cdot 5^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{2}{5}}$

Cociente de potencias de la misma base

Reducimos a común denominador las fracciones de los exponentes, y lo expresamos como potencia de un producto.

$$2^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{5}{30}} \cdot 5^{\frac{12}{30}} = (2^5 \cdot 5^{12})^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{2^5 \cdot 5^{12}} = \sqrt[30]{20.000}$$

c) $\sqrt[7]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[7]{5^{\frac{1}{3}}} = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{7}} = 5^{\frac{1}{3 \cdot 7}} = 5^{\frac{1}{21}} = \sqrt[21]{5}$

ACTIVIDADES

32 Efectúa estas operaciones.

a) $\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45}$

b) $7\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[5]{3^2} + \frac{\sqrt[3]{3}}{5}$

33 Opera y simplifica.

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$

b) $\left(\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$

d) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}$

6 RADICALES

6.1 RAÍCES. SIGNIFICADO

RECUERDA

• $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ $\sqrt[4]{625} = 5$ porque $5^4 = 625$

• Con la calculadora, utiliza la tecla $\sqrt[n]{}$ seguida del índice:

$\sqrt[4]{625} \rightarrow \boxed{625} \sqrt[n]{} \boxed{4} = \rightarrow \boxed{5}$

1 Resuelve y comprueba con la calculadora:

a) $\sqrt[3]{8}$

b) $\sqrt[3]{2197}$

c) $\sqrt[4]{16}$

d) $\sqrt[5]{32}$

e) $\sqrt[4]{81}$

f) $\sqrt[3]{27}$

g) $\sqrt[3]{0,027}$

h) $\sqrt[6]{0,000064}$

i) $\sqrt{0,25}$

2 Calcula el valor de n en cada caso:

a) $\sqrt[n]{n} = 2$

b) $\sqrt[n]{125} = 5$

c) $\sqrt[7]{7^n} = 7$

d) $\sqrt[5]{4^n} = 1$

e) $\sqrt[n]{3^n} = 3$

f) $\sqrt[n]{81} = 3$

g) $\sqrt[n]{1024} = 2$

h) $\sqrt[5]{3^n} = 9$

i) $\sqrt[15]{7^n} = 49$

j) $\sqrt[9]{4^7} = 2^n$

k) $\sqrt{81^3} = 3^n$

l) $\sqrt[4]{9^n} = 3^2$

3 Obtén con ayuda de la calculadora las siguientes raíces, con un error menor que cinco milésimas:

a) $\sqrt[3]{256}$

b) $\sqrt[5]{6,2}$

c) $\sqrt[8]{72,85}$

6.2 EXPRESIÓN DE RADICALES MEDIANTE EXPONENTES FRACCIONARIOS. SIMPLIFICACIÓN

1 Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario:

a) $\sqrt[5]{a^9} = a^{2/5}$

b) $\sqrt{a^5}$

c) $\sqrt[3]{7^4}$

d) $\sqrt[3]{3^7}$

e) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

f) $\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$

2 Pon en forma de raíz las siguientes potencias:

a) $x^{5/4}$

b) $y^{1/2}$

c) $3^{5/3}$

d) $4^{3/4}$

e) $x^{-2/3}$

f) $y^{-3/2}$

3 Simplifica al máximo los radicales siguientes:

a) $\sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = 2^{6/12} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

b) $\sqrt[5]{32}$

c) $\sqrt[6]{125}$

d) $\sqrt[5]{0,00032}$

e) $\sqrt[6]{0,027}$

f) $\sqrt[8]{0,0016}$

g) $\sqrt[8]{16x^4}$

h) $\sqrt[8]{16x^4y^6}$

i) $\sqrt[8]{\frac{625(a+3)^{20}}{(x^2+2x+1)^2}}$

j) $\sqrt[4]{1 + \frac{9}{16}}$

k) $\sqrt[4]{x^2 + x + \frac{1}{4}}$

l) $\sqrt[4]{1 - \frac{2xy - y^2}{x^2}}$

RECUERDA

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$\sqrt[kn]{a^{km}} = a^{km/kn} = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

6.5 SUMA DE RADICALES

1 Simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $5\sqrt{2} - 11\sqrt{2} + 4\sqrt{5} - 13\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + \sqrt{5}$

b) $5\sqrt{2} - \sqrt{18} + 3\sqrt{72} + 11\sqrt{8} - 3\sqrt{50}$

c) $3\sqrt{12} - 11\sqrt{2} + 8\sqrt{3} + 5\sqrt{8} + 2\sqrt{75}$

d) $4\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + 11\sqrt{125} - 20\sqrt{5}$

e) $5\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{27} - 4\sqrt{3} - \sqrt{300}$

f) $5\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{250} + 2\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{2}$

g) $5\sqrt[4]{2} + 7\sqrt{2} - 6\sqrt[4]{32} + 13\sqrt[4]{64} - \sqrt[4]{1250}$

h) $\sqrt{\frac{2}{5}} + 4\sqrt{\frac{18}{125}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{45}} + \sqrt{\frac{5}{2}}$

i) $3\sqrt[3]{81ab^6} + 12b\sqrt[3]{\frac{3a^4}{8}} + \sqrt[3]{3a^7}$

j) $3\sqrt[3]{8-8x^2} - 5\sqrt[3]{27-27x^2} + 2\sqrt[3]{125-125x^2}$

k) $\frac{3\sqrt{1-x^2}}{x} + \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} - \sqrt{\frac{4}{x^2} - 4}$

l) $\left(\sqrt{\frac{a}{b^2} - \frac{1}{b}} - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a-b}}$

1.5.4 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON RADICALES

3.5 ECUACIONES CON RADICALES

EJERCICIO RESUELTO

Resolver la ecuación $\sqrt{3x+1} + 1 = x$.

$$\sqrt{3x+1} = x-1 \quad \leftarrow \text{Se aísla el radical.}$$

$$(\sqrt{3x+1})^2 = (x-1)^2 \quad \leftarrow \text{Se elevan al cuadrado los dos miembros.}$$

¡Atención! Al elevar al cuadrado, pueden aparecer soluciones falsas. Es imprescindible comprobar las soluciones sobre la ecuación inicial.

$$3x+1 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 5x = 0 \quad \begin{cases} x=0 \rightarrow \sqrt{3 \cdot 0 + 1} + 1 = 2 \neq 0 \rightarrow x=0 \text{ no es solución.} \\ x=5 \rightarrow \sqrt{3 \cdot 5 + 1} + 1 = 5 \rightarrow x=5 \text{ sí es solución.} \end{cases}$$

La única solución es $x = 5$.

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x - \sqrt{2x-1} = 1 - x$

b) $\sqrt{x^2 - 5x + 7} - 2x + 5 = x - 3$

c) $\sqrt{3x+4} + 2x = 4$

d) $x - \sqrt{7-3x} = 1$

e) $\sqrt{5x+6} - 3 = 2x$

f) $\sqrt{x^2-4} = \frac{x}{2} - 1$

g) $1 - \sqrt{x-3} = x - 8$

h) $3\sqrt{3x+4} - x = 5 + x$

EJERCICIO RESUELTO

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 1} = 0$

b) $\sqrt{x} - \sqrt{x - 16} = 2$

a) $\sqrt{x^2 + x} = \sqrt{x + 1}$ ← Aislamos un radical.

$(\sqrt{x^2 + x})^2 = (\sqrt{x + 1})^2$ ← Elevamos al cuadrado los dos miembros.

$x^2 + x = x + 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} \begin{cases} x = -1 \rightarrow \text{Sí es solución.} \\ x = 1 \rightarrow \text{Sí es solución.} \end{cases}$

b) $-\sqrt{x - 16} = 2 - \sqrt{x}$ ← Aislamos un radical.

$(-\sqrt{x - 16})^2 = (2 - \sqrt{x})^2$ ← Elevamos al cuadrado los dos miembros.

$x - 16 = 4 - 4\sqrt{x} + x$

$4\sqrt{x} = 20$ ← Aislamos el radical.

$\sqrt{x} = 5 \rightarrow x = 25 \rightarrow \sqrt{25} - \sqrt{25 - 16} = 5 - 3 = 2 \rightarrow x = 25$ sí es solución.

2 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\sqrt{5x - 7} - \sqrt{1 - x} = 0$

b) $\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{3 - x} = 0$

c) $\sqrt{x + 2} - \sqrt{2(x + 1)} = 0$

d) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 5} = 0$

3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{2x + 1} = 5$

b) $\sqrt{4x + 1} + \sqrt{x - 2} = 7$