

TEMA 1: LÍMITES Y CONTINUIDAD

1) Calcula los siguientes límites de funciones en un punto:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x-1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{2x-1} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2x+4}{x^2+1}} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} (x+3)^{2x+1}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2-3x}{x^2-5} \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{x^2+4} \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}}{2x-7} \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 3} (x+5)^{x-3}$$

Solución: a) 5 b) 0 c) 2 d) 1/2 e) 7/4 f) 1/4 g) 1 h) 1

2) Calcula los siguientes límites en el infinito:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-1}{2x+5} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3+4x}{-2x^3+3} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{x^2-9} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x}{x^2-1}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-90}{x^3-3} \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+5}{1-2x} \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3+x+1} \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+x+1}{2x^2+1}$$

Solución: a) ∞ b) -4 c) 0 d) 1 e) 0 f) -3 g) 2 h) 3/2

3) Halla los siguientes límites indeterminados:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-25} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{4-x^2} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{3x}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{5}}{x} \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x^2-10x+9} \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^2-9}{x} \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$$

Solución: a) 4 b) 3/10 c) 1/16 d) 1/3 e) $\frac{-1}{2\sqrt{5}}$ f) 1/48 g) 6 h) -3

4) Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2-1} \right) = \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} \right) =$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} \right) = \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x}{x^2-25} - \frac{1}{x-5} \right) = \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-1}{x-3} - \frac{x+5}{x^2-4x+3} \right)$$

Solución: a) -1 b) $-2/0 = \pm \infty$; $1^+ = -\infty$; $1^- = +\infty$ c) $7/0 = \pm \infty$; $-1^+ = -\infty$; $-1^- = +\infty$

d) $-5/0 = \pm \infty$; $5^+ = -\infty$; $5^- = +\infty$ e) $-4/0 = \pm \infty$; $3^+ = -\infty$; $3^- = +\infty$

5) Calcula:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+1x+1x^3) \cdot 3x^2}{x^2 \cdot (x^2-5x^3) - 2x^5} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2+x}) \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10}$$

Solución: a) -3/7 b) 2 c) 1/6 d) -1/2 e) 0 f) -5/4

6) Dada la función definida a trozos, encuentra los límites indicados:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{9}{x-1} & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x^2+2x-3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

Solución: $-\infty$; $+\infty$; -1; 2; $+\infty$; 9/2; 12

- 7) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ calcular los siguientes límites:
- a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Solución: a) -5 ; b) $\nexists$ $I^+ = +\infty$; $I^- = -3$; c) 0 ; d) $-\infty$

- 8) Halla m y n para que la siguiente función sean continua en todo $\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+m & \text{si } x \leq -1 \\ x+n & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
- Solución: $m = 4$; $n = 3$

- 9) Se considera la función dada por $f(x) = \begin{cases} a-x & \text{si } x \leq -3 \\ -3a-x^2 & \text{si } -3 < x \leq 2 \\ x^2-8x+17 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Determine el valor de a para que f sea continua en todo su dominio. Solución: $a = -3$

- 10) Se considera la función dada por $f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} & \text{si } x \leq 4 \\ 2x-8 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ estudiar la continuidad.

Solución: $\mathcal{R}$

- 11) Estudia la continuidad de la siguiente función $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2-2x & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$ Solución: $\mathcal{R} - \{0, 1\}$

- 12) Se considera la función dada por $f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{2}{x^2} & \text{si } x \leq 4 \\ 2x-8 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ Estudiar la continuidad de f

Solución: $\mathcal{R} - \{0, 4\}$

- 13) Se considera la función $f(x) = \frac{3-x}{2-x}$ Calcule las asíntotas de la función y haga un breve gráfico de su posición con respecto a ellas.

- 14) Se considera la función $f(x) = \frac{-4x+1}{2x-5}$ Calcule las asíntotas de la función y haga un breve gráfico de su posición con respecto a ellas.

- 15) Se considera la función $f(x) = \frac{3-x^2}{2-x}$ Calcule las asíntotas de la función y haga un breve gráfico de su posición con respecto a ellas.

EXAMEN TIPO:

1) Resolver los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{3x+2} \right)^{\frac{2x^2+1}{x}}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^2+2x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-3}$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-3}{x+1} \right)^{x^2+1}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x^2-4}$
- f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(7+7x+7x^3) \cdot x^2}{x^2 \cdot (x^2-4x^3) - 2x^5}$

2) Hallar las asíntotas verticales y horizontales de la función: $f(x) = \frac{-2x^2}{x^2-9}$ Realiza una gráfica de la posición.

3) Halla m y n para que la siguiente función sean continua en todo R, $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ mx + n & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

4) Estudia la continuidad de la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{3x+7}{x+3} & \text{si } x > -2 \end{cases}$

5) Dada la función definida a trozos, encuentra los límites indicados:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{9}{x-1} & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2 + 6x - 32 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$